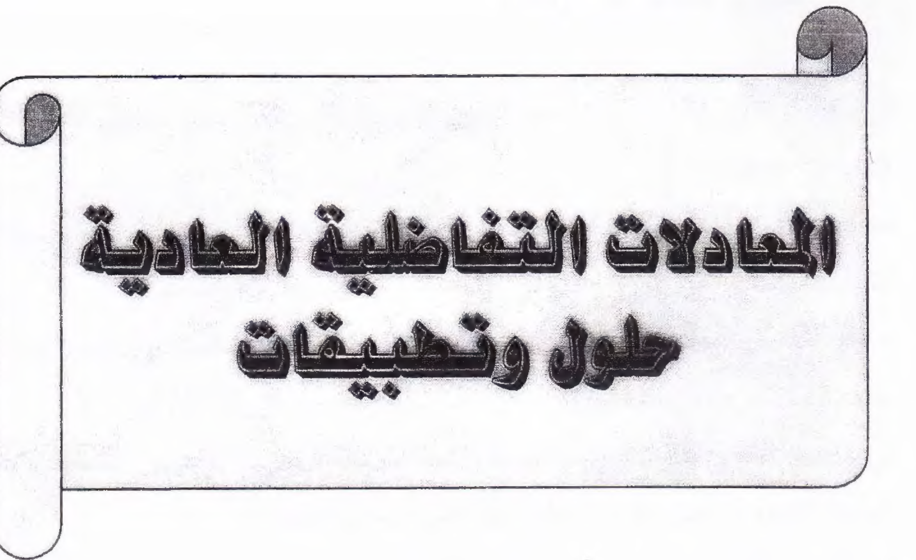
الجمهورية اليمنية

جامعة العلوم والتكنولوجيا





المعادلات التفاضلية العادية
حلول وتطبيقات

إعداد

الدكتور / إسماعيل بوقفة   الدكتور / عايش الهنادوة

المقدمة

يسعدنا أن نقدم كتاب المعادلات التفاضلية وتطبيقات للناطقين بالضاد . لقد حاولنا جهدنا أن يأتي هذا الكتاب متناسقاً مترابطاً يتسم بسهولة العبارات وتسلسل الأفكار وتعدد الأمثلة حتى يتسنى للقارئ الكريم أن يلم بجوانب هذا المنهج ؛ كما يجد بين طياته مجموعة من التطبيقات الهندسية والفيزيائية والكهربائية .

يحتوي الكتاب على أربعة عشر فصلاً :

في الفصل الأول تطرقنا إلى مجموعة من التعاريف والمفاهيم حول المعادلات التفاضلية العادية .

أما في الفصل الثاني والثالث والرابع والخامس فقد تعرضنا إلى دراسة المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولي وإلى طرق حلها بصورة تفصيلية.

أما في الفصل السادس عرضنا مجموعة من الأمثلة التطبيقية المتنوعة جزء منها هندسية والأخرى فيزيائية حول المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى .

في الفصل السابع تناولنا دراسة المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية من المرتبة الثانية وبعض طرق إيجاد الحل على صورة مغلقة .

في الفصل الثامن عرضنا مجموعة من التطبيقات المتنوعة في شتى فروع العلوم الفيزيائية والهندسية على المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية .

في الفصل التاسع درسنا طريقة هامة لحل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والمتمثلة في إيجاد الحل على هيئة متسلسلة بجوار نقطة ما .

في الفصل العاشر تطرقنا إلى البحث عن متسلسلات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية الشهيرة .

في الفصل الحادي عشر تم توسيع دراسة المعادلات الخطية لتشمل المعادلات ذات المراتب العالية وطرق حلها .

في الفصل الثاني عشر تناولنا دراسة تحويل لابلاس الذي يعتبر إحدى الطرق النافعة لحل المعادلات التفاضلية الخطية .

في الفصل الثالث عشر درسنا نظرية وجود وحدانية حلول المعادلات التفاضلية من وجهة الرياضيات البحتة .

في أخر فصل تعرضنا إلى دراسة النظم الخطية للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والتي ترتكز أساساً على معرفة المفاهيم في الجبر الخطي وجبر المصفوفات .

كما وضعنا في نهاية كل فصل مجموعة من التمارين غير محلوله ليتدرب عليها الطالب .

وفي الختام نأمل أن نكون قد وفقنا في إعطاء صورة واضحة عن مختلف مواضيع هذا الفرع من الرياضيات التطبيقية .

هذا ولا يفوتنا أن نتقدم بالشكر للأخوة الذين ساهموا من قريب أو بعيد في إخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود .

والله نسأل أن يكون هذا المجهود المتواضع أمر ذو بال وحينئذ نسأله أن تعم الفائدة .

والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل ؛؛؛

المؤلفان

الفصل الأول

المعـــــادلات التفاضليـــــة العاديـــــة

Ordinary Differential Equations

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية العادية

Ordinary Differential Equations

I – 1- مقدمة: Introduction

يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية تحتل المكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية ؛ حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضلية ولفهم هذه المسألة فلا بد من حل هذه المعادلة التفاضلية أو على الأقل معرفة كثير من خصائص هذا الحل وأن استعصى الحصول عليه صراحة ؛ وعملية الحصول على الحل ليست دوماً بالمسألة اليسيرة بل أن كثيراً من المعادلات التفاضلية غير قابل للحل .

لقد استحوذ هذا الأمر على اهتمام الرياضيين منذ بداية علم التفاضل في القرن السابع عشر وحتى أيامنا هذه ؛ سواء من ناحية دراسة وجود الحل أو من ناحية خصائصه وطبيعته أو من ناحية الحصول عليه . ولم يقف الرياضي طويلاً أمام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة مغلقة (Closed Form Solution) بل تجاوز ذلك إلى الحل التقريبي والحل العددي . وتمثل الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية مساحة كبيرة من خريطة الأبحاث الرياضية خصوصاً في عصرنا هذا عصر الحاسبات الآلية الكبيرة السعة والمفرطة السرعة .

Differential Equation   أولاً : المعادلة التفاضلية :-

هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المســـتقل (المســـتقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية عاديــة (Ordinary) إذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي إلا علـــى مشـــتقات عادية .

أمثلــة -1-

ليكن x المتغير المستقل و y المتغير التابع ؛ فالعلاقــات التاليــة تمثــل معــادلات تفاضلية عادية :-

$$\frac{dy}{dx} + y = 3x^2 \qquad (1)$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = (3-x^2)y \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = o \qquad (3)$$

$$(x-y)dx + (x+y)dy = O \qquad (4)$$

ملاحظة :-

كثير ما نستخدم الشرطة المائلة للدلالة على المشتقة العادية فمثلاً :

المشتقة الأولى للمتغير y بالنسبة إلى x هي $y' = \frac{dy}{dx}$

المشتقة الثانية تكتب على الصورة $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقة الثالثة تكتب على الصورة $y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$

وللمشتقات العليا يصعب تكرار الشّرطة فتكتب المشتقة على الصورة :

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

حيث توضح مرتبة المشتقة أعلى المتغير وبين قوسين لتمييزها عن الأس وعلى ذلك $y^{(4)}$ تعني المشتقة الرابعة و $y^{(5)}$ هي المشتقة الخامسة وهكذا وعليه يمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة :

$$xy''' + (2\sin x)y''.\ y' = (3 - x^2)y \qquad (3)$$

ثانياً : المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial) :-

هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع داله لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية .

أمثلة -2-

ليكن U المتغير التابع و z, y, x المتغيرات المستقلة ؛ فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = O \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f(x, y, z) \qquad (6)$$

$$x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 3y\frac{\partial U}{\partial x} + (x - y^2)U = o \qquad (7)$$

ثالثاً : مرتبة المعادلة التفاضلية (order) :

إذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية العادية قيل أن هذه المعادلة من المرتبة n (order) تتحدد مرتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخلة فيها .

مثال -3-

- المعادلة التفاضلية (1) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى.
- المعادلة التفاضلية (2) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثالثة .
- المعادلة التفاضلية (3) هي من المرتبة الثانية .
- المعادلة التفاضلية (4) هي من المرتبة الأولى لاحتوائها على التفاعلات dy , dx .

رابعاً : درجة المعادلة التفاضلية (Degree) :

هي الأس المرفوع إليها أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية ، وقبل تحديد درجة المعادلة يجب وضعها على صورة قياسية وصحيحة من حيث المشتقات .

أمثلة -4-

- **المعادلة (1) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى ومن الدرجة الأولى.**
- **المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثالثة ومن الدرجة الأولى.**
- **المعادلة :**

$$(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + x(\frac{dy}{dx}) + x^2y^3 = e^x \sin x \qquad \textbf{(8)}$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ومن الدرجة الثالثة .

- **المعادلة :**

$$\left[1 + (\frac{dy}{dx})^2\right]^{½} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + xy = o \qquad (9)$$

قبل تحديد درجة هذه المعادلة يجب وضعها على صورة خالية من الجذور

أي :
$$1 + (\frac{dy}{dx})^2 = (3\frac{d^2y}{dx^2} + xy)^2$$

أو
$$9(\frac{d^2y}{dx^2})^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 + x^2y^2 - 1 = o$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية .

خامساً - المعادلة التفاضلية الخطية (Linear) :

هي المعادلة الخطية في المتغير التابع ومشتقاته جميعاً .

مثـــال -5-

المعادلة :
$$x^2y'' + xy' + x^2y = e^x \sin x$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية حيث أن كلاً مــن المتغيــر التابــع y ومشتقاته y' , y'' خطية أي كل منها مرفوع للأس واحد ولا توجد حـــوا صــل ضرب مشتركة فيما بينها ولا يهم أن تكون معاملاتها ثوابت أو دوال في x .

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها معادلة تفاضلية لا خطية .

مثـــال -6-

المعادلات التفاضلية التالية معادلات تفاضلية لا خطية :

$$yy'' + y' = x \qquad (10)$$

$$(11) \qquad y' + x\sqrt{y} = \sin x$$

$$(12) \qquad y''' + x^2 y'' + \sin y = o$$

حيث تظهر لا خطية المعادلة (10) في حاصل الضرب بين y , y'' .

بينما في المعادلة (11) تظهر في الحد y مرفوع لأس يختلف عن الواحد في المعادلة (12) تظهر في الحد Siny وهي دالة لا خطية في y .

ملاحظة :

لا تؤثر اللاخطية على مرتبة المعادلة التفاضلية ،

فالمعادلة (10) لا خطية من المرتبة الثانية .

والمعادلة (11) لا خطية من المرتبة الأولى .

والمعادلة (12) لا خطية من المرتبة الثالثة .

سادساً : الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي

$$(13) \qquad P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + P_1(x)y' + P_o(x)y = Q(x)$$

أو

$$(14) \qquad \sum_{i=o} P_i(x)y^{(i)} = Q(x)$$

حيث المتغير التابع y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها . والدوال المعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطية أم غير خطية وكذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$.

سابعاً : المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (Homogeneous) :

إذا انعدمت الدالة $Q(x)$ من المعادلة التفاضلية (13) لجميع قيم x قيل أنها معادلة تفاضلية خطية متجانسة ، وإلا كانت المعادلة التفاضلية غير متجانسة أو كاملة .

أمثلـــة -7-

- المعادلة $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = o$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من المرتبة الثانية .

- المعادلة $xy' + (\sin x)y = x^2(\sin x + 2)$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى .

ملاحظـــة :

إذا كـــانت المعامـــلات $P_i(x)$ فـــي المعادلـــة (13) ثابتـــةً لا تتعلـــق بالمتغيـــر x قيـــل عـــن المعادلـــة التفاضليـــة الخطيـــة أنهـــا ذات معاملات ثابتـــة (of Constant Coefficients) وإلا فإنـــه يقـــال عنهـــا أنها ذات معاملات متغيرة (of Variable Coefficients) .

أمثلـــة :

- المعادلة $y''' + 6y'' - 3y' + 2y = e^x$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية غير متجانسة من المرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة

- المعادلة $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = o$

فهي معادلة تفاضلية ذات معاملات متغيرة .

ثامناً : الثوابت الاختيارية : Arbitrary Constants

عادة ما تظهر ثوابت في حل المعادلات التفاضلية ؛ ويكون الثابت اختياريـــاً (Arbitrary constant) إذا كانت القيم التي يأخذها لا تعتمد على المتغير التـــابع أو المتغير المستقل وتكون الثوابـــت الاختياريـــة الداخلـــة فـــي تعبـــير مـــا جوهريـــة (Essential) إذا لم يمكن دمج أحدها في ثابت أخر .

أمثلـــة -8-

- لنعتبر التعبير $T(x) = Ae^{-x^2+B}$

قد يبدو لأول وهله أن هناك ثابتين A , B ولكن بإمعان النظر نرى أنـــه يمكــن دمج الثابتين في ثابت جوهري واحد :

$$T(x) = Ae^{-x^2+B} = Ae^{B}.e^{-x^2} = ce^{-x^2}$$

حيث : $C = Ae^{B}$

- لنعتبر التعبير $T(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3 \sin^3 x$

الذي يتضمن ثلاثة ثوابت ولكن الحقيقة يمكن اختزالهم إلى ثابتين جوهريين فقـــط حيث :

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

إذن

$$T(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3\left[\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right]$$

$$= (A_1 + \frac{3}{4}A_2)\sin x + (A_2 - \frac{1}{4}A_3)\sin 3x$$

$$= A_4 \sin x + A_5 \sin 3x$$

حيث

$$A_4 = A_1 + \frac{3}{4}A_2 \ , \ A_5 = A_2 - \frac{1}{4}A_3$$

ملاحظات :

1- يمكن تحوير أماكن الثوابت الاختيارية دون التأثير على عددها .

أمثلـــة -9-

- التعبير $T(x) = e^{B-x^2}$ يحتوي على ثابت واحد B ويمكن كتابته على الصورة :

$$T(x) = e^B . e^{-x^2} = Ae^{-x^2}$$

حيث $A = e^B$

- التعبير $T(x) = \ln x + A$ يمكن كتابته على الصورة :

$$T(x) = \ln x + A = \ln(Bx)$$

حيث $A = \ln B$

- التعبير $T(x) = A\cos x + B\sin x$ وهو يتضمن ثابتين B, A ويمكـــن كتابتـــه على الصورة :

$$T(x) = A\cos x + B\sin x = C\cos(x + \varepsilon)$$

حيث $$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \varepsilon = -\tan^{-1}(\frac{B}{A})$$

2- نذكر هنا بالثابت الجمعي والثابت الضربي . فالأول يضاف إلى الدالـــة والثـــاني يضرب في الدالة .

أمثلـــة -10-

- في التعبير $T(x) = x^2 . e^{-x} + A$, A هو ثابت جمعـــي ويقـــال أن الدالة $T(x)$ تساوي x^2e^{-x} في حدود ثابت جمعي .

- في التعبير $T(x) = Ax^2 e^{-x}$, A ثابت اختياري يقال أن الدالة $T(x)$ تساوي x^2e^{-x} في حدود ثابت ضربي .

I-3- حــل المعادلـــة التفاضليـــة :

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$F[x, y, y', \dots, y^{(n)}] = o \qquad (15)$$

والتي من المرتبة n ؛ حيث F تابع حقيقي .

ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً معرف من أجل جميع قيم x في المجال الحقيقي I .

وكذلك كل مشتقاته حتى المرتبة n معرفة من اجل كل قيمة للمتغير x حيث $x \in \mathrm{I}$

نقول أن التابع $f(x)$ حل للمعادلة (15) إذا تحقق الشرطان التاليان :

أ- إذا كان التابع $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(n)]$

معرفا من أجل كل قيم $x \in \mathrm{I}$

ب- إذا كان : $F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(n)] \equiv o$

من أجل كل قيم $x \in \mathrm{I}$

وهذا يعني أنه بتعويض $f(x)$ ومشتقاته مكان y ومشتقاته في المعادلة التفاضليـــة (15) تتحول المعادلة (15) إلى مطابقة من أجل جميع قيم $x \in \mathrm{I}$.

أمثلـــة -11-

- لنعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى التالية :

$$xy' - 2y = o$$

حلها هو $y = Ax^2$ من أجل $x \in \mathrm{I}$

حيث A ثابت اختياري .

وللتحقق من ذلك نحسب $y' = 2Ax$

ثم نعوض في الطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية فنجد:

$$xy' - 2y = x(2Ax) - 2(Ax^2) \equiv o$$

- لنعتبر المعادلة التالية :

$$y'' + k^2 y = o \qquad \text{حيث ثابت} \quad k =$$

حل هذه المعادلة هو $y = A\cos kx + B\sin kx$

حيث B, A ثابتان اختياريان لأن :

$$y' = Ak\sin kx + Bk\cos k$$

$$y'' = -k^2[A\cos kx + B\sin x]$$

وبالتعويـض فـي المعادلـة التفاضليـة تتحـول إلـى مطابقـة .

ملاحظـات :

1- توضح الأمثلة السابقة أن المعادلة التفاضلية تقبل ما لانهاية مـن الحلـول وهـذه اللانهاية من الحلول يمكن تمثيلها عموماً على هيئة دالة أو صيغة واحدة تحتـوي على ثوابت اختيارية ؛ وتعتبر هذه الدالـة حـلاً عامـاً (General solution) للمعادلة التفاضلية يمكن منه انتقـاء أي حـل خـاص (Particular solution) بإعطاء الثوابت الاختيارية أي قيم نشاء . على انه قد يوجد أحد أو بعض الحلـول للمعادلة التفاضلية لا يمكن استنتاجها من الحل العام بإعطاء قيم مناسـبة للثوابـت الاختيارية ومثل هذا الحل أن وجد يسمى بالحل المنفـرد (Singular solution) للمعادلة التفاضلية ونادراً ما تقابلنا مثل هذه الحلول المتفاردة في المسائل الهندسية.

وإذا تضمن حل عام للمعادلة التفاضليـة كل الحلول لهذه المعادلة فهو حـل كامـل (Complete Solution) .

2- يمكن تشكيل المعادلة التفاضلية لمعادلة غير محلوله بالنسبة للثابت الاختيـاري ؛ إذا كان لدينا مجموعة التوابع :

$$F(x, y, A) = o$$

ومشتقها هو :

$$F'_x(x, y, A) + F'_y(x, y, A) \equiv o$$

فالمعادلة التفاضلية للتوابع (16) هي المعادلة الناتجة من حذف الثابت الاختياري A من المعادلتين (16) ؛ (17) ولتكن :

$$G(x,y,y')=o \qquad (18)$$

مثـــال -12-

لنعتبر الدالة $y = Ax^2$

مشتقتها هي $y' = 2Ax$

بحذف الثابت الاختياري A بين هاتين المعادلتين نحصـــل علـــى المعادلـــة التفاضلية التي تحققها هذه الدالة وهي :

$$xy' - 2y = o$$

I-4. مسألة القيم الحدية في المعادلات التفاضلية :-

قد نكون أحياناً مضطرين للبحث عن حل لمعادلة تفاضلية بحيث أن هذا الحـــل يجب أن يحقق شروطاً معينة عند أكثر من قيمة من قيم المتغير المستقل . فـــي هـــذه الحالة قد نوجد جميع الحلول ثم ننتقي منها ما يحقق الشروط المطلوبة ؛ وقـــد نبحـــث مباشرة عن هذا الحل دون النظر إلى بقية الحلول . نسمي الشروط المطلوب تحقيقـــها بالشروط الحدية(Boundary Conditions) ونسمي المعادلة التفاضلية المصحوبـــة بتلك الشروط الحدية بمسألة القيم الحدية (Boundary Value Problem) .

مثـــال -13-

لنعتبر المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''+y=o \quad , \quad y(o)=1 \quad , \quad y'(\pi)=1$$

هذه المعادلة التفاضلية تكون مسألة القيم الحدية وحلها هو :

$$y=\cos x-\sin x$$

تمـــاريـــــــن

I – صنف المعادلات التالية من حيث ذكر المرتبة ؛ المتغـــير التـــابع ؛ والمتغـــيراو المتغيرات المستقلة وكونها عادية أو جزئية . في حالة كونها عادية حدد هـــل هي خطية أم لا ؟ وإذا كانت خطية هل هي متجانسة أم لا ؟

(i) $y'' + \frac{1}{x}y' + y = o$ (ii) $y'' = [1 + y'^2]^{3/2}$

(iii) $d(U\vartheta) = \vartheta^2 d\vartheta$ (iv) $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$

(v) $\dot{x}^3 + x^4 = 1$ (vi) $xyy' = (y'')^3$

II– تحقق من أن الحل المذكور قرين كل من المعادلات التفاضلية التالية يصلح حـــلاً لها . اذكر هل هو حل عام أم لا ؟

(i) $y' + y = 2 \quad , \quad y = Ae^{-x} + 2$

(ii) $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} - 3v = 2\cos t - 4\sin t \quad , \quad v = Ae^{t} + Be^{-3t} + \sin t$

(iii) $x(y'')^2 = 2yy' \quad , \quad y = Ax^2$

أرسم عدة أعضاء من طائفة المنحنيات ذات البارامتر الواحد $y = Ae^{-x} + 2$ فـــي المطلوب (i) كذلك عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (ii) الذي يحقق كون

$$v'(o) = -5 \quad , \quad v(o) = 2$$

III– للمعادلة التفاضلية اللاخطية ذات المرتبة الأولى $y'^2 - xy' + y = o$ حل عـــلم (أساسية) $y = Ax - A^2$ يتضمن ثابتاً اختيارياً واحداً . كذلك لها حل $y = \frac{x^2}{4}$ لايمكن استنتاجه من الحل العام بإعطاء قيم مناسبة للثابت الاختياري A .

جد بيانيا العلاقة بين الحل العام والحل المتفارد . هل يمكن استنتاج هذه العلاقة تحليليا

IV- ارسم مختلف أعضاء طائفة المنحنيات ذات البارامتر الواحد والتي تمثلها الأساسية

$$x^2 + By^2 = 1$$

ثم جد المعادلة التفاضلية لهذه الطائفة من المنحنيات .

V- جد المعادلة التفاضلية للأساسية :

$$y^2 = Ax + B$$

VI- جد المعادلة التفاضلية لمجموعة التوابع :

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

<u>VII- تعريف المغلف :</u>

مغلف منحنيات هو منحنى يمس في كل نقطة من نقاطه أحد هذه المنحنيات .

إيجاد المغلف :

إذا كان لدينا مجموعة المنحنيات

$$F(x, y, c) = o \qquad (1)$$

حيث C ثابت اختياري إذا كان لهذه المنحنيات مغلف فهذا المغلف يحقق في كل نقطة من نقاطه العلاقة (1) ومشتقها بالنسبة للثابت أي

$$F'_c \ (x, y, c) = o \qquad (2)$$

وبالتالي يحقق حلهما المشترك الناتج من حذف الثابت بينهما أي

$$G(x, y) = o \qquad (3)$$

وهذا الشرط لازم وغير كاف

تطبيق :- جد مغلف المنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية :

$$y'^2 = y - 2$$

الفصـــل الثانـــي

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

Differential Equations of the First Order

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

Differential Equations of the First Order

II ـ 1 ـ المعنى الهندسي للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى :

Geometrical Interpretation:

سندرس في هذا الفصل طرق حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى سواء من الدرجة الأولى أو من الدرجة الأعلى من الأولى ومثل هذه المعادلات يكتب على الصورة العامة التالية:

$$F(x, y, y') = o \qquad (1)$$

وقبل البدء في عرض مختلف الطرق لحل المعادلة التفاضلية (1) نقدم أولاً المعنى الهندسي (الجيومتري) لهذه المعادلة التفاضلية .

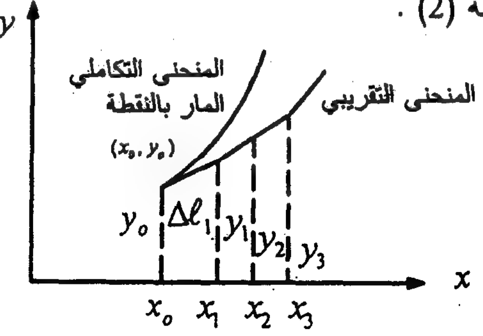
لنعتبر المعادلات التي تحل في أي التي يمكن كتابتها على الصورة:

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

حيث الدالة $f(x,y)$ وحيدة القيمة عند جميع النقط (x,y) في منطقة ما T وتمثل القيمة $f(x_o, y_o)$ قيمة المشتقة y' عند النقطة (x_o, y_o) أي ميل المنحنى التكاملي للمعادلة التفاضلية (2) المار بالنقطة (x_o, y_o) وللحصول على المنحنى التكاملي لهذه المعادلة المار بالنقطة (x_o, y_o) نتحرك مسافة $\Delta\ell_1$ في اتجاه $f(x_o, y_o)$ لنصل إلى النقطة (x_1, y_1) نحسب $f(x_1, y_1)$ أي الميل عند النقطة (x_1, y_1) ثم نتحرك مسافة $\Delta\ell_2$ في هذا الاتجاه الجديد $f(x_1, y_1)$ لنصل إلى النقطة (x_2, y_2) ؛ نحسب الميل $f(x_2, y_2)$ عند هذه النقطة ثم نتحرك في هذا الاتجاه مسافة صغيرة $\Delta\ell_3$ لتصل إلى

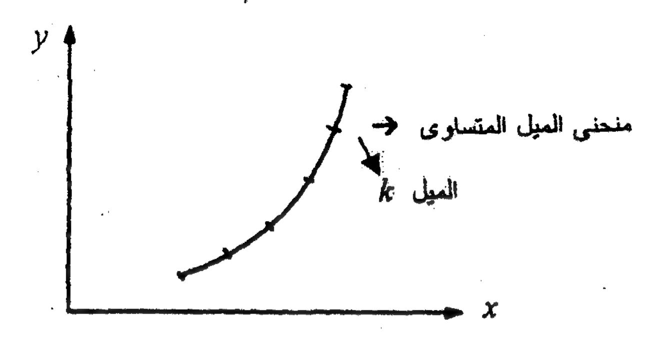
النقطة (x_3, y_3) وهكذا لنحصل في النهاية حينما تؤول المسافات الصغيرة إلى الصفر على المنحنى التكاملي المار بالنقطة (x_o, y_o) شكل -1-

ويتميز هذا المنحنى بأن أي نقطه عليه وميل مماسه عند هذه النقطة يحققان المعادلة التفاضلية (2) . وهذا المنحنى التكاملي هو أحد الحلول البيانية الخاصة بهذه المعادلة التفاضلية وكل مرة نبدأ من نقطة جديدة نحصل على منحنى تكاملي جديد كأحد الحلول للمعادلة (2) .



شكل -1- المعنى الهندسي للمعادلة (2)

يمكن رسم المنحنى $f(x, y) = k$ حيث k ثابت في المستوى xy ويسمى هذا المنحنى بمنحنى الميل المتساوي (Curve of Constant Slope) للمعادلة (2) ثم نرسم من عند نقط هذا المنحنى أجزاء قصيرة من مستقيمات متوازية ميلها k تسمى بالعناصر المستقيمة (Lineal Elements) وكل عنصر من هذه العناصر المستقيمة يمس المنحنى التكاملي للمعادلة (2) عند نقطة تقاطعه مع منحنى الميل المتساوي. نكرر هذه العملية بإنشاء منحنيات ميل متساوية مختلفة تغطي المنطقة T وذلك بإعطاء الثابت k قيماً مختلفة ولكل من هذه المنحنيات نرسم العناصر المستقيمة الخاصة به ، وتكون مجموعة العناصر المستقيمة مجال أو حقل الاتجاه (Direction Field) للمعادلة التفاضلية (2) ويمكن بسهولة بمساعدة هذه العناصر المستقيمة رسم منحنيات تقريبية للمنحنيات التكاملية للمعادلة (2) شكل -2-



شكل -2- منحنيات الميل المتساوية

أمثلـــة :

ارسم مجال الاتجاه لكل من المعادلتين التفـــاضليتين مـــن المرتبـــة الأولـــى التاليتين :-

1- $y' = xy$ (3)

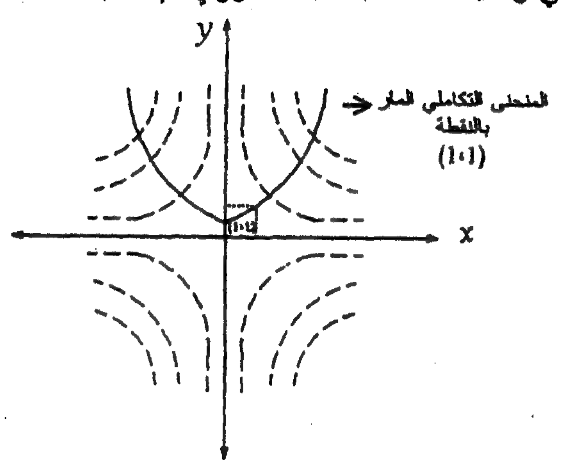
2- $y' = x$ (4)

وارسم المنحنى التكاملي المار بالنقطة (1.1) لكلتا المعادلتين .

الحـــل :

1- منحنيات الميل المتساوي للمعادلة (3) هي : $x.y = k$

وهي زائديات قائمة بالنسبة لمحوري الإحداثيات

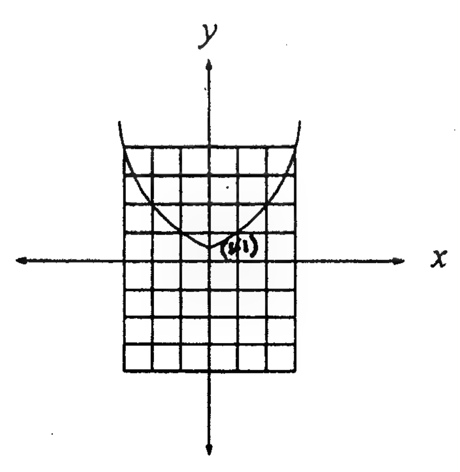


شكل -3- حل المعادلة $y' = xy$

ويبين الشكل -3- مجموعة من هذه المنحنيات مع العناصر المستقيمة لكـــل منحنـــى ولرسم المنحنى التكاملي المار بالنقطة (1،1) نتحرك من هذه النقطة علـــى منحنـــى يوازي العناصر المستقيمة لكل من منحنيات الميل المتساوي .

2- بنفس الطريقة فمنحنيات الميل المتساوي للمعادلة (4) هي $x = k$

وهي مستقيمات موازية للمحور y



شكل -4- حل المعادلة $y' = x$

ويبين الشكل -4- مجموعة من هذه المنحنيات مع العناصر المستقيمة لكل منحنى كما يوضح أيضا المنحنى التكاملي المار بالنقطة (1،1) .

<u>ملاحظـــة :</u>

قبل التطرق إلى مختلف الطرق لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولـــى نذكر انه قد يكون للمعادلة التفاضلية (1) حل وحيد (Unique Solution) وقد يوجد لها حلول عديدة (Many Solutions) وقد لا يوجد لها أي حل على الإطلاق

<u>مثال -3-</u>

مسألة القيم الحدية التالية :-

$$xy' = 2y \qquad و \qquad y(x_o) = y_o$$

يوجد لها حل وحيد هو $y = x^2$ إذا كانت $y(1) = 1$

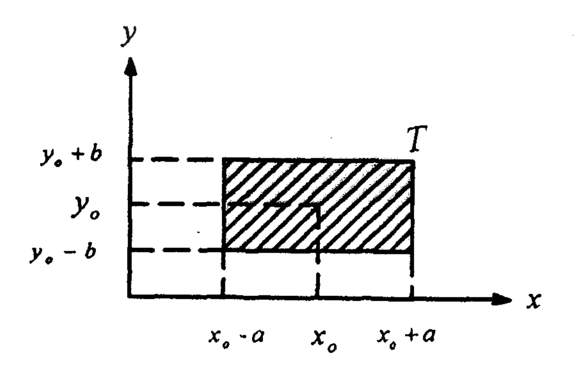
وتوجد لها حلول لانهائية هي $y = Ax^2$ حيث A ثابت اختياري إذا كانت $y(o) = o$

ولا يوجد لها حل على الإطلاق إذا كانت $y(o) = 1$

II –2ـ نظرية وجود الحل Existence Theorem :

إذا كانت (x_o, y_o) نقطة في المستوى oxy وكانت T منطقـــة مســتطيلة مغرفة كمايلي:

$$T = \{(x, y) \in \Re^2 : |x - x_o| \leq a, |y - y_o| \leq b, a, b \in \Re^+\}$$



شكل –5– المنطقة T

وإذا كانت الدالة $f(x, y)$ في المعادلة (2) وحيدة القيمة ومستمرة عند جميع نقـــط T وتحقق الشرط التالي :

$$\forall (x, y) \in T \quad \text{و} \quad \exists M \geq o \quad : \quad |f(x, y)| < M$$

وكانت $h = \min(a, \frac{b}{M})$

فان المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ تقبل حلاً وحيداً علـــى الأقـــل $y = \phi(x)$ في المجال $|x - x_o| < h$ ويأخذ هذا الحل القيمة y_o عند $x = x_o$.

إذا كانت كل من $f(x,y)$ ؛ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ دالة وحيدة القيمة ومستمرة فـــي المنطقة T وتحقق الشرط التالي :

$$\forall (x,y)\in T\ ,\ \ \exists M\geq o\ \ :\ \ |f(x,y)|<M$$

$$\forall (x,y)\in T\ ,\ \ \exists K\geq o\ \ :\ \ \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|<K$$

وكانت $h=\min(a,\frac{b}{M})$ فأنه يوجد حل وحيد $y=\phi(x)$ يحقق المعادلة التفاضليـــة (2) في الفقرة $|x-x_o|<h$ ويحقق الشرط الابتدائي التالي :

$$y(x_o)=\phi(x_o)=y_o$$

<u>ملاحظة :</u>

الجدير بالذكر أن " وجود الحل " لا يعني إمكانية الحصول عليه في صورة مغلقة "Closed Form" أو مضبوطة في جميع الأحوال بل قد يمكن الحصول علـــى الحل بإحدى الطرق التقريبية أو العددية .

II -3 - معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة لفصل المتغيرين :
Separable First order Equations:

في حالات كثيرة يمكن وضع المعادلة التفاضلية :

$$y'=f(x,y) \qquad (5)$$

علـــى الشكـــل

$$g(y)\frac{dy}{dx}+h(x)=o \qquad (6)$$

أو ما يكافئ ذلك

$$g(y)\,dy+h(x)\,dx=o \qquad (7)$$

ويقال عن هذه المعادلة أنها معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرين أو للسهولة معادلة قابلة للفصل (Separable Equations) وذلك لانه أمكن فصل المتغير x عن المتغير y تماماً . وبمعنى أخر يتم فصل المتغيرين إذا كان معامل تفاضل x دالـــة من x فقط ومعامل تفاضل y دالة من y فقط .

وبمكاملة الطرفين نحصل على :

$$\int g(y)dy + \int h(x)\,dx = A \qquad (8)$$

حيث A ثابت اختياري واستخدمنا ثابتاً واحداً لأن المعادلة من المرتبة الأولى ؛

وبإجراء التكاملين ينتج :

$$G(y) + H(x) = A \qquad (9)$$

ونكون قد حصلنا على حل عام للمعادلة التفاضلية .

ملاحظة :

قد نجد صوراً أخرى للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل

مثال -4-

-1 $$g_1(y)f_2(x)dy + g_2(y)f_1(x).dx = o \qquad (10)$$

-2 $$\frac{dy}{dx} + f(x)\,h(y) = o \qquad (11)$$

حيث يمكـــن فصـــل المتغيـــرات في المعادلة (10) بالضرب فـــي عـــامل التكميـــل

(Integrating Factor) $\dfrac{1}{f_2(x)g_2(y)}$

لنحصل على :

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy + \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = o$$

ويمكن الآن أن نكمل :

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} \mathrm{dy} + \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \mathrm{dx} = A$$

بينما يمكن فصل المتغيرات في المعادلة (11) بالضرب في العــامل التكميلــي $\frac{1}{\mathrm{h}(x)}$ لنحصل على :

$$\frac{1}{\mathrm{h(y)}} \mathrm{dy} + f(x)dx = o$$

ومنها

$$\int \frac{1}{\mathrm{h(y)}} dy + \int f(x)dx = A$$

مثال –5–

حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - xy = o$$

الحل :

المعادلة معطاة على شكل المعادلة (11) السابقــة بالقسمــة علــى y يمكــن فصل المتغيرين

$$\frac{dy}{y} - xdx = o$$

بالمكاملة

$$\ln y - \frac{x^2}{2} = \ln A$$

ووضعنا الثابت الاختياري على الصورة $\ln A$ لكونها اكثر ملائمة

$$Ln\ \frac{y}{A} = \frac{x^2}{2}$$

$$y = Ae^{x^2/2}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة وهو عبــارة عــن طائفــة منحنيــات Gauss الآسية .

II ـ4. معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى تختزل إلى صورة قابلة للفصل:
First-Order Differential Equation Reducible to Separable Form:

1-معادلة تفاضلية متجانسة من المرتبة الأولى:
Homogeneous First-Order Differential Equation:

تعريف :

يقـال عـن دالـة $f(x,y)$ أنهـا دالـة متجانسـة مـن الدرجـة n (Homogeneous Function of degree) إذا كان :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y) \qquad (12)$$

ويتحقق ذلك إذا كان كل حد من حدود $f(x,y)$ له نفس الدرجة في المتغيرين y,x

- فمثلاً الدالة : $f(x,y)=x^3-x^2y+2xy^2+7y^3$

هي دالة متجانسة من الدرجة (3) وذلك لأن :

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^3-(\lambda x^2)(\lambda y)+2(\lambda x)(\lambda y)^2+7(\lambda y)^3$$
$$=\lambda^3 f(x,y)$$

- كذلك الدالة $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ هي دالة متجانسة من الدرجة صفر لأن :

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x-\lambda y}{\lambda x+\lambda y}=\frac{x-y}{x+y} f(x,y)=\lambda^{o} f(x,y)$$

- والدالة $f(x,y)=e^{y/x}+\sin^{1}(y/x)$ هي أيضاً دالة متجانسة من الدرجة o .
- بينما الدالة $f(x,y)=x^3+\sin n^2\cos y$ هي دالة غير متجانسة لأن

$$f(\lambda x,\lambda y)\neq\lambda^{n} f(x,y)$$

- كذلك الدالة $f(x,y)=\dfrac{x-y+1}{x+y-2}$ ليست متجانسة .

وبناءً على ما تقدم وكامتداد له يقال عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى :

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=o \qquad (13)$$

أنها معادلة تفاضلية متجانسة إذا كان كل من الدالتين $M(x,y)$, $N(x,y)$ دالـــة متجانسة من نفس الدرجة .

ويمكن كتابة المعادلة (13) على الصورة :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

وواضح أن الطرف الأيمن هو دالة متجانسة من الدرجة o لأن :

$$\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)}=\frac{\lambda^n M(x,y)}{\lambda^n N(x,y)}=\lambda^o\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

وبالتالي

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)}$$

وبإعطاء λ القيمة الخاصة $\lambda=1/x$ نحصل على :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)}$$

أي

$$\frac{dy}{dx}=g(y/x) \qquad (14)$$

وهذه صورة أخرى قياسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة وفيها المتغير الكسري هو (y/x) وهو نفسه دالة متجانسة من الدرجة o .

ويمكن اختزال المعادلة المتجانسة **(14)** إلى صورة قابلة للفصل باستخدام التعويض التالي :

$$\vartheta = y/x$$

حيث
$$y = x\vartheta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta$$

فالمعادلة **(14)** تكتب على الشكل :

$$\frac{1}{g(\vartheta) - \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{x} dx$$

أي

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta = g(\vartheta)$$

أي انه تم فصل المتغيرين في المعادلة المتجانسة وبمكاملة المعادلة الأخيرة نحصل على ϑ كدالة من x ثم نعوض عن $\vartheta = y/x$ لنستعيد العلاقة بين المتغيرين الأصليين x, y .

مثال -6-

حل المعادلة التفاضلية $(x^3, y^3)dx - 2xy^2 dy = o$

الحل :

هذه المعادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة 3

باستخدام التعويض $y = x\vartheta$ يمكن اختزالها إلى صورة قابلة للفصل

$$y = x\vartheta \Rightarrow dy = xd\vartheta + \vartheta dx$$

أذن
$$(x^3 + x^3\vartheta^3)dx - 2x(x\vartheta)^2(xd\vartheta + \vartheta dx) = o$$

أو $$x^3\left[(1+\vartheta^3)dx - 2\vartheta^2(xd\vartheta + \vartheta dx)\right] = o$$

و $$(1+\vartheta^3 - 2\vartheta^3)dx - 2\vartheta^2 x d\vartheta = o$$

إذن $$\frac{1}{x}dx = \frac{2\vartheta^2}{1-\vartheta^3}d\vartheta$$

بالمكامله $$Lnx = -\frac{2}{3}Ln(1-\vartheta^3) + Ln\ A$$

أو $$x^3 = \frac{A}{(1-\vartheta^3)^2}$$

وبالتعويض عن $\vartheta = y/x$ نحصل على :

$$x^3(1-\frac{y^3}{x^3})^2 = x^3\left[\frac{x^3-y^3}{x^3}\right]^2 = A$$

إذن $$(x^3 - y^3)^2 = Ax^3$$

2- معادلات فيها معاملات التفاضل دالتان خطيتان :

Coefficient Functions are Linear:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = o$

إذا كانت كل من دالتي المعاملات N, M دالة خطية في y, x : أي

$$a_1x + b_1y + C_1)dx + (a_2x + b_2y + C_2)dy = o \qquad \textbf{(15)}$$

فأنه يمكن بتعويض خطي مناسب تحويل هذه المعادلة إلى معادلة تفاضلية متجانسة وبالتالي قابلة للفصل . وهناك حالتان ..

الحالة الأولى :

إذا كان المستقيمان $a_1x+b_1y+C_1=o$

$$a_2x+b_2y+C_2=o$$

يتقطعان وشرط ذلك هو $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ أي $a_1b_2-a_2b_1\neq o$

فأنه يمكن تحويل المعادلتين السابقتين إلى معادلتين متجانستين بحذف الحدين المطلقيـن C_2,C_1 وذلك بنقل المحورين y,x دون دوران إلى نقطة تقاطع المستقيمين .

لتكن هذه النقطة هي (h,k) أي : $a_1h+b_1k+C_1=o$

$$a_2h+b_2k+C_2=o$$

ليكن التحويل : $y=Y+k$ و $x=X+h$

فأن : $dy=dY$, $dx=dX$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية **(15)** ينتج :

$$\underbrace{(a_1h+b_1k+C_1}_{o}+a_1x+b_1y)dx+\underbrace{(a_2h+b_2k+c_2}_{o}+a_2x+b_2y)dy=0$$

ومنه $(a_1X+b_1Y)dx+(a_2X+b_2Y)dY=o$

بالتعويض $Y=\vartheta.X$ نحصل على : $\frac{dY}{dX}\vartheta+X\frac{d\vartheta}{dX}$

$$(a_1X+b_1\vartheta X)dX+(a_2X+b_2\vartheta X)(\vartheta dX+Xd\vartheta)=o$$

أو
$$[(a_1+b_1\vartheta)+(a_2+b_2\vartheta)\vartheta]dX \pm (a_2+b_2\vartheta)Xd\vartheta = o$$

$$\frac{dX}{X} = -\frac{a_2+b_2\vartheta}{a_1+(b_1+a_2)\vartheta+b_2\vartheta^2}d\vartheta$$

وقد تم فصل المتغيرين ؛ بالمكاملة نحصل على معادلة من ϑ, X وبتعويض $\vartheta = y/x$ نحصل على معادلة من Y, X

<u>مثال -7-</u>

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = \frac{x+y-1}{x-y+5}$$

الحل :

لدينا
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+5}$$

هذه المعادلة بهذه الصورة ليست متجانسة .

لنأخذ المستقيمين التاليين : $x+y-1=o \quad , \quad x-y+5=o$

نلاحظ أن المستقيمين غير متوازين ونقط التقاطع هي $(-2,3)$

وعلى ذلك نستخدم التحويل التالي : $y=Y+3 \quad , \quad x=X-2$

$$\therefore \quad dx = dX \quad , \quad dy = dY$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(X-2)+(Y+3)-1}{(X-2)-(Y+3)+5} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة يتم فصل المتغيرين بالتعويض $Y=\vartheta X$ ومنه

$$\vartheta + X\frac{d\vartheta}{dX} = \frac{X+\vartheta X}{X-\vartheta X} = \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} \Rightarrow X\frac{d\vartheta}{dX} = \frac{1+\vartheta^2}{1-\vartheta}$$

أو
$$\frac{1}{X}dX = \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta^2}d\vartheta = \left[\frac{1}{1+\vartheta^2} - \frac{\vartheta}{1+\vartheta^2}\right]d\vartheta$$

أو
$$\ln X + A_1 = \tan^{-1}\vartheta - \ln(1+\vartheta^2)$$

أو
$$\ln X^2(1+\vartheta^2) + A_2 = 2\tan^{-1}\vartheta$$

وبالتعويض عن $\vartheta = \frac{Y}{X}$ نجـد :

$$2\tan^{-1}\frac{Y}{X} = \ln X^2(1+\frac{Y^2}{X^2}) + A_2 = \ln(X^2+Y^2) + A_2$$

ثم بالتعويض عن Y, X بدلالة x, y نجد :

$$\therefore \quad 2\tan^{-1}(\frac{y-3}{x+2}) - \ln\left[y^2 + x^2 - 6y + 4x + 13\right] = A$$

الحالة الثانية :

إذا كان المستقيمان
$$a_1x + b_1y + c_1 = o$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = o$$

متوازيين وشرط ذلك هو $a_1b_2 - a_2b_1 = o$ معنى هذا أن

$$a_2x + b_2y = \ell(a_1x + b_1y)$$

حيث ℓ ثابت .

وباستعمال التحويل $\vartheta = a_1x + b_1y$ نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left[\frac{d\vartheta}{dx} - a_1\right] \Leftarrow \frac{d\vartheta}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\left[\frac{d\vartheta}{dx}-a_1\right]=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{\vartheta+c_1}{\ell\vartheta+c_2}$$

$$\therefore \quad \frac{d\vartheta}{dx}-a_1=b_1\frac{\vartheta+c_1}{\ell\vartheta+c_2}\Rightarrow\frac{d\vartheta}{dx}=a_1+\frac{b_1(\vartheta+c_1)}{\ell\vartheta+c_2}$$

ومنه

$$\frac{\ell\vartheta+c_2}{a_1c_2+b_1c_1+\vartheta(\ell a_1+b_1)}d\vartheta=dx$$

بالمكاملة نحصل على معادلة من ϑ,x ثم بتعويض ϑ نحصل على الحل العام

<u>مثال -8-</u>

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(x+2y+3)dx-(3x+6y+7)dy=o$$

الحل :

لدينا

$$(x+2y+3)dx-(3x+6y+7)dy=o$$

واضح أن المستقيمين $x+2y+3=o$, $3x+6y+7=o$ متوازيــان

بوضع

$$\vartheta=x+2y\Rightarrow\frac{d\vartheta}{dx}=1+2\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{d\vartheta}{dx}-1\right]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+3}{3(x+2y)+7}\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{d\vartheta}{dx}-1)=\frac{\vartheta+3}{3\vartheta+7}$$

وبالترتيب نحصل على فصل المتغيرين :

$$\frac{3\vartheta+7}{5\vartheta+13}d\vartheta=dx$$

$$(\frac{3}{5}-\frac{4}{25}\frac{5}{5\vartheta+13})d\vartheta=dx$$

$$\therefore \quad \frac{3}{5}\vartheta - \frac{4}{25}\ln(5\vartheta + 13) = x + A_1$$

أو
$$15\vartheta - 4\ln(5\vartheta + 13) = 25x + A_2$$

وبالتعويض عن $\vartheta = x + 2y$ نجـد :

$$5x - 15y + 2\ln(5x + 10y + B) = A$$ وهو المطلوب

2-معادلات على الصورة :

$$yM(xy)dx + xN(xy)dy = o$$

ويمكن فصل المتغيرين من خلال التحويل $\vartheta = xy$

مثال -9-

حل المعادلة التفاضلية :

$$y(xy - 1)dx + x(1 + xy)dy = o$$

الحل :

نستخدم التعويض : $xy = \vartheta \Rightarrow y = \frac{\vartheta}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta}{x^2}$

$$\therefore \quad \frac{\vartheta}{x}(\vartheta - 1) + x(1 + \vartheta)\left[\frac{x\frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta}{x^2}\right] = o$$

$$\vartheta(\vartheta - 1) - \vartheta(\vartheta + 1) + x(\vartheta + 1)\frac{d\vartheta}{dx} = o$$

$$(1 + \frac{1}{\vartheta})d\vartheta = \frac{2}{x}dx$$

وبذلك تم فصل المتغيرين . وبأجراء التكامل :

$$\vartheta + \ln\vartheta = 2\ln x - \ln A$$

ومنه
$$x^2 = A\vartheta e^{\vartheta} \Rightarrow x = Ay.e^{xy}$$

3-صور أخرى :

هنـــاك صـــور أخرى غير قياسية يمكن بتعويضات مناسبة تحويلـــها إلـــى صورة قابلة للفصل . وليست هناك قاعدة عامة لمثل هذه التعويضات فكــل معادلة لها ظروفها الخاصة التي توحي بالتعويض المناســـب وكشـــأن كـل تعويض ؛ فليس أي تعويض يؤدي إلى حل المسألة ؛ بل يحتاج الأمـــر إلـــى مهارة وفطنة للوصول إلى التعويض المناسب .

مثال -10-

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' + 3(3x+y)^2 = o$$

الحل :

توحي هذه المسألة بإستخدام التعويض التالي :

$$\vartheta = 3x + y$$

ومنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\vartheta}{dx} - 3$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة :

$$\therefore \quad \frac{d\vartheta}{dx} - 3 + 3\vartheta^2 = o \Rightarrow \frac{1}{1-\vartheta^2} d\vartheta = 3dx$$

$$\therefore \quad \tanh^{-1}\vartheta = 3x + c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} = 3x + \ln A. \Rightarrow \frac{\vartheta+1}{\vartheta-1} = A.e^{6x}$$

وبالتعويض عند ϑ بدلالة y, x :

$$\frac{3x+y+1}{3x+y-1} = Ae^{6x}$$

تمـــــارين

I- حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام طريقة فصل المتغيرات :

(i) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=o$

(ii) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+y^2+1=o \quad , \quad y(o)=1$

(iii) $\dfrac{dy}{dx}=4-y \quad : \quad (1^\circ)\,y(o)=1 \quad , \quad (2^\circ)\,y(o)=5$

(iv) $x(y^2-1)+y(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}=o$

(v) $e^{2x-y}dx+e^{x+y}dy=o$

II- حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام التعويض $y=\vartheta x$:

(i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x\sinh(y/x)+3y\cosh(y/x)}{3x.\cosh(y/x)}$

(ii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$

(iii) $y^2+(x^2+xy)\dfrac{dy}{dx}=o$

(iv) $y^2dx+(x^2-xy)dy=o$

(v) $(x^2+y^2)(xdx+ydy)-\dfrac{y}{x}(xdx-ydx)=o$

(باستخدام الإحداثيات القطبية)

III- حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x-y+5}$$

$$(x+2y+3)dx-(3x+6y+7)dy=o$$

$$(6x-2y-3)dx-(2x+2y-1)dy=o$$

$$(2x+3y+1)dx+(10x+15y+4)dy=o$$

$$(10x-4y+12)dx-(x+5y+3)dy=o$$

IV- حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$y(3x^2y^2-6xy+5)dx+x(2x^2y^2-3xy)dy=o$$

$$x^2y^3dx+5x^2ydy+6ydx=o$$

$$y(1-xy+x^2y^2)dx+x(x^2y^2)dx+x(x^2y^2+xy)dy=o$$

$$(1+2xy-x^2y^2)dx+2x^2dy=o$$ (اضرب بـ y)

$$(1+xy\sin(xy))dx+x^2\sin(xy)dy=o$$ (اضرب بـ y)

V- حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^2}{xy(1-x)}$$ (استخدام الإحداثيات القطبية)

$$x^2y'^2-6xyy'+5y^2-4x^3y=o$$ (بعد إيجاد درجة تجانسها)

$$xyy'-2y^2-4x^4=o$$ (بعد إيجاد درجة تجانسها)

$$(xy'-2y)^2=x^2(2xy'+y)$$ (بعد إيجاد درجة تجانسها)

$$x^2y'^2-2xyy'+y^2-4x^3y=o$$ (بعد إيجاد درجة تجانسها)

VI- المطلوب إثبات النظرية التالية وفق الخطوات المطلوبة :

نظرية :

كل معادلة من الشكل $F(x,y,\frac{dy}{dx})=o$ (1)

إذا استبدلنا فيها كل x بـ λx وكل y بـ $\lambda^n y$ ولم تتغير المعادلة فالمعادلة تـرد إلى منفصلة المتحولات وتسمى متجانسة من الدرجة n

المطلوب :

1- برهن هذه النظرية باستخدام الخطوات التالية :

أ- عوض في المعادلة (1) عن x بـ λx وعن y بـ $\lambda^n y$ $(\forall\lambda)$

ب- كيف تصبح المعادلة إذا أخذنا $\lambda = 1/x$

جـ- بفرض أن $\vartheta = y/x^n$ ....(2)

باشتقاق (2) برهن أن $\frac{y'}{x^{n-1}} = x\vartheta^1 + n\vartheta$

د- كيف تصبح المعادلة في هذه الحالة

هـ- استنتج أنها معادلة قابلة لفصل المتغيرات وأن حلها من الشكل :

$$x = \lambda G(\vartheta)$$

وبالرجوع إلى التابع الأصلي نجد :

$$x = \lambda G(\frac{\gamma}{x^n})$$

خلاصة : لحل المعادلة (1) نعوض x بـ λx و y بـ $\lambda^n y$ ثم نعين قيمة n بحيث تصبح المعادلة غير تابعة لـ λ ثم نفرض :

$$\vartheta = y/x^n$$

فيكون : $y = \vartheta x^n$, $y' = nx^{n-1}\vartheta + x^n\vartheta^1$

تطبيق : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xyy' - 2y^2 + 4x^4 = o$$

الفصـــل الثالث

المعادلات التفاضلية التامة من المرتبة الأولى

Exact First Order Differential Equations

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية التامة من المرتبة الأولى

Exact First Order Differential Equations

III.1. تعاريف Definitions

أ- لتكن الدالة $U = f(x, y)$ حيث f دالة مستمرة وقابلة للأشتقاق في مجال ما من x نقول بأن التفاضل الكلي للدالة U هو dU حيث .

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

ومن نظريات التحليل الرياضي في المشتقات الجزئية نعلم بأن :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

ب- نقول عن المقدار : $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ بأنة تفاضل تام إذا كان هناك دالة ما U بحيث أن تفاضلها الكلي هو:

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

وبعبارة أخرى نقول عن المقدار:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

بأنه تفاضل تام إذا كانت هناك دالة بحيث يكون:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x.y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x.y)$$

ج- إذا كان المقدار $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ تفـــاضلاً تامـــاً فنســـمي المعادلـــة التفاضلية :

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=o$$

بمعادلة تفاضلية تامة .

III 2ـ نظـريــة -1-:

لتكن المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=o \qquad (1)$$

فالشرط اللازم والكافي لتكون هذه المعادلة تامة هو:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

1- لزوم الشرط:

الفرض : المعادلة (1) تامة

الطلـــب : البرهـــان أن: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

البرهان: بما أن المعادلة التفاضلية تامة فإن المقدار:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

هو تفاضل تام . أي هناك دالة U بحيث أن:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=M \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial x}=N$$

ولكن

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه : $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

2- كفايـــة الشـــرط :

الفرض : المعادلة التفاضلية (1) تحقق الشرط $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

الطلب: البرهان بأن المعادلة تامة.

البرهان:

يجب أن تبتدئ من الفرض وهو أن : $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

ونبرهن على أن المعادلة (1) هي معادلة تامة. وهذا يعني أنه يجب أن نبرهن بأنه توجد هناك دالة مثل U بحيث يكون:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=N$$

بسهولة يمكن أيجاد دالة مثل U تحقق الشرطين الأخيرين ولكن الصعوبة في إيجـــاد دالة تحقق الشرطين الأخيرين معاً. ومن أجل البرهان نبتدئ بإيجاد U الـــذي يحقــق أحد الشرطين. أي ليكن U الذي يحقق الشرط.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M$$

وبالمكاملة بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتاً نجد :

$$U=\int M\partial x+\phi(y) \qquad (3)$$

حيث ϕ ثابت التكامل. ولكن بما أننا اعتبرنا y ثابتاً فإن ϕ قد تكون دالة في y فقط وليست دالة في x.

في الحقيقة إذا كانت هذه الدالة المطلوبة فيجب أن تحقق الشرط التالي أي :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M\partial x + \phi(y)\right]$$

ولكن
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{dy}$$

ومنه نجد
$$\frac{d\phi}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x \qquad (4)$$

وبما أن ϕ دالة في y فقط فإن $\frac{d\phi}{dy}$ دالة في y فقط وبالتـــالي مشـــتقتها بالنســبة للمتغير x معدومة.

إذن :

$$o = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int M dx$$

أو
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M dx\right]$$

ولكن ما داخل القوسين يعني تكاملاً جزئياً بالنسبة للمتغير x مع اعتبار y ثابت ثم اشتقاقه جزئياً بالنسبة للمتغير x مع y ثابت. إذن يمكــن كتابــة العلاقــة الأخــيرة علـــى الشكـــل:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = o$$

وهذا محقق بالفرض . إذن هناك دالة U تفاضلـــها معيـن بالمعادلــة (1) ومعيـن بالعلاقــة (3).

أما لإيجادها فيكفي إيجاد $\phi(y)$ وتعويضها بقيمتها في (3) ولكن:

$$\frac{d\phi}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x$$

وبالمكاملة كلياً بالنسبة للمتغير y نجد:

$$\phi(y) = \int\left[N - \int\frac{\partial M}{\partial y}\partial x\right]dy$$

وبالتعويض في U نجد :

$$U = \int M\partial x = \int\left[N - \int\frac{\partial M}{\partial y}\partial x\right]dy$$

وبما أن المعادلة تامة فإن $dU = o$ وبالتالي $U = A$ هو حل لهذه المعادلة. ومنه

فالحل العام للمعادلة هو:

$$\int M\partial x + \int\left[N - \int\frac{\partial M}{\partial y}\partial x\right]dy = A \qquad (5)$$

ملاحظـــات:-

1- لإيجاد الحل العام للمعادلة قد نتبع طريقة برهان النظرية وقد نتبع طريقة التجميـع ونعني بذلك إذا أخذنا المعادلة التفاضلية وفرقناها إلى مجموعة تفاضلات بحيث تكـون كل مجموعة تفاضلاً تاماً (أو بحيث نجعل كل مجموعة منها تفـاضلاً تامـاً) عندهـا بمكاملة مجموعة التفاضلات التامة نجد الحل العام للمعادلة المعطاة.

2- إذا حققت المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = o$$

الشرط :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلـــة تامـــة .

أما إذا كان : $$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلة غير تامة ولا تحل بالطريقة السابقة .

مثال -1-

بين أن المعادلة :

$$(4x - 3y - y\sin x)dx + (\cos x - 3x - \sin y)dy = o \qquad \textbf{(6)}$$

هي معادلة تفاضلية تامة ومن ثم جد حلها العام.

الحــل :

في حالتنا هذه :

$$M(x, y) = 4x - 3y - y\sin x$$

$$N(x, y) = \cos x - 3x - \sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3 - \sin x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin - 3$$

ومنه فإن $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ مما يعني أن المعادلة المعطاة تامة ويمكن حلها بــأكثر مــن طريقـــة.

الطريقة الأولى:

بسبب كون المعادلة المعطاة تامة , يمكن كتابتها على الصورة :

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy = o$$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) = 4x - 3y - y\sin x \tag{7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) = \cos x - 3x - \sin y \tag{8}$$

بمكاملة (7) جزئياً بالنسبة إلى x نحصل على:

$$U(x,y) = 2x^2 - 3yx + y\cos x + \phi(y) \tag{9}$$

لإيجاد الدالة ϕ نفاضل طرفي (9) جزئياً بالنسبة إلى y لنحصل على :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -3x + \cos x + \frac{d\phi}{dy} = N(x,y) = \cos x - 3x - \sin y$$

إذن :

$$\frac{d\phi}{dy} = -\sin y \Rightarrow \phi(y) = \cos y$$

وعلية :

$$U(x,y) = 2x^2 - 3yx + y\cos x + \cos y$$

وبالتالي فحل المعادلة التفاضلية التامة المعطاة هو :

$$2x^2 - 3yx + y\cos x + \cos y = A \tag{10}$$

حيث A ثابتاً أختيارياً .

ملاحظـــة :-

يمكن اتباع نفس الخطوات السابقة ولكن نبدل x و y أي بمكاملة (8) نحصل على:

$$U(x,y) = y\cos x - 3xy + \cos y + \omega(x) \tag{11}$$

ثم نفاضل هذه المعادلة بالنسبة إلى x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -y\sin x - 3y + \frac{d\omega}{dx}$$

$$M(x,y) = 4x - 3y - y\sin x$$

إذن
$$\frac{d\omega}{dx} = 4x$$

ومنه
$$\omega(x) = 2x^2$$

أي
$$U(x,y) = y\cos x - 3xy + \cos y + 2x^2 = A$$

وهو نفس التعبير الذي وصلنا أليه.

الطريقة الثانية : طريقة المقارنة :-

نحصل على الدالة $U(x,y)$ مرة من تكامل $M(x,y)$ جزئياً بالنسبة إلى x ومرة من تكامل $N(x,y)$ جزئياً بالنسبة إلى y ثم نقارن المعادلتين الناتجتين:

$$U(x,y) = 2x^2 - 3yx + y\cos x + \phi(y)$$

$$U(x,y) = y\cos x - 3xy + \cos y + \omega(x)$$

وينتج أن :

$$\phi(y) = \cos y \qquad , \qquad \omega(x) = 2x^2$$

الطريقة الثالثة :

باستخدام الصيغة (5) مباشرة :

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left[N-\int\frac{\partial M}{\partial y}\partial x\right]dy$$

$$=(2x^2-3yx+y\cos x)+\int\left[\cos x-3x-\sin y-\frac{\partial}{\partial y}(2x^2-3yx+y\cos x)\right]dy$$

$$=(2x^2-3yx+y\cos x)+\int[\cos x-3x-\sin y+3z-\cos x)]dy$$

$$=2x^2-3yx+y\cos x+\int-\sin y dy=2x^2-3yx+y\cos x+\cos y$$

وهو نفس التعبير السابق والذي نساوية بثابت A لنحصل على الحل:

الطريقة الرابعة :

بتطبيق القاعدة التالية :

تكامل $M(x,y)$ بالنسبة إلى x بإعتبار y ثابت ثم نضيف إلى ناتج التكامل، تكامل حدود $N(x,y)$ التي لا تحتوي على x بالنسبة إلى y ثم نساوي المجموع بثـــابت اختياري لنحصل على الحل.

$$\int(4x-3y-y\sin x)\partial x+\int-\sin y dy=A$$

ويكون لدينا :

$2x^2-3xy+y\cos x+\cos y=A$ وهو نفس الحل .

الطريقة الخامسة :

ترتيب حدود المعادلة ليكون كل حد تفاضلاً تاماً :

فالمعادلة المعطاة يمكن كتابتها على الصورة :

$$4xdx - 3(ydx + xdy) - (y\sin xdx - \cos dy) - \sin ydy = o$$

أو

$$d(2x^2) - 3d(xy) + d(y\cos x) + d(\cos y) = o$$

وكل حد الآن هو تفاضل تام وبالمكاملة نجد أن:

$$2x^2 - 3xy + y\cos x + \cos y = A$$

وهو نفس الحل بطبيعة الحال .

وفي الحقيقة فإن طرف الحل هذه ترتبط ببعضها البعض ولا يعني الأمـــــر أن تحـــل المسألة دوماً بأكثر من طريقة، بل سردنا هذه الطرق كي يتمرس الطالب على التفكير والحدس. وواضح أن أوجز هذه الطرق هي الطريقة الرابعة.

III.3 عامـــل التكميـــل Integrating Factor

أ- تعريــف :

في أعلب الأحيان تكون المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى التالية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = o \qquad \textbf{(12)}$$

معادلة تفاضلية غير تامة أي أن: $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

ولكن في بعض الحالات يمكن تحويل هذه المعادلة غير التامة إلى معادلــــة تفاضليـــة تامة عن طريق الضرب فـــي دالــــة مناسبـــة $\rho(x,y)$ تسمـــى بمعامـــل التكميـــل (Integrating Factor) .

إذا كان $\rho(x,y)$ هو عامل التكميل للمعادلة التفاضلية غير التامة السابقة (12) فـإن المعادلة التالية :

$$\rho(x,y)M(x,y)dx+\rho(x,y)N(x,y)dy-o \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho M)=\frac{\partial}{\partial x}(\rho N) \quad (14)$$

ويمكن حل المعادلة (12) باستخدام معلومات الفقرة السابقة ومن اليسير أثبات أن حـل المعادلة التامة (13) هو أيضا حل للمعادلة التفاضلية غير التامة (12).

مثال -2-

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$ydx-xdy=o \quad (15)$$

هذه المعادلة ليست تامة بصورتها الحالية

ولكننا نعلم أن :

$$\frac{d}{dx}(\frac{y}{x})=-\frac{ydx-xdy}{x^2}=-\frac{1}{x^2}(ydx-xdy)$$

$$=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy$$

ومنذ ذلك نرى أنه بضرب طرفي (15) في المعامل $-\frac{1}{x^2}$ فإنها تتحول إلى معادلـة تفاضلية تامة :

$$-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy=o \quad (16)$$

حيث : $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x})$

وحل هذه المعادلة هو بالطبع $y/x = A$ أي $y = Ax$

معنى ذلك أن $(-\frac{1}{x^2})$ هو عامل التكميل للمعادلة (15).

كذلك نعلم أن : $d\left[Ln(\frac{y}{x})\right] = \frac{1}{y/x}\frac{xdy - ydx}{x^2}$

$$= -\frac{1}{xy}(ydx - xdy)$$

وعلى ذلك فإن $(-\frac{1}{xy})$ يصلح أيضاً أن يكون عامل تكميل للمعادلة .

وحلها هو ثابت = $\ln y/x$ أي $y = Ax$ وهو نفس الحل بطبيعة الحال .

معنى هذا أنه قد يوجد أكثر من عامل تكميل لنفس المعادلة التفاضلية ولكن ألا يتبادر لذهن الطالب أن ذلك متيسر دائماً.

ب- طرق البحث عن عامل التكميل :

ليست هناك عموماً طريقة واحدة مضمونه لايجاد عامل التكميل بل كما قلنا تحتاج عملية إيجاد عامل التكميل إلى فطنه ومهارة.

ووجدنا أن الشرط الذي يجب أن يحققه عامل التكميل هو:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho M) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho N)$$

$$M\frac{\partial \rho}{\partial y} - N\frac{\partial \rho}{\partial x} + (\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})\rho = o \qquad (17)$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية التي يحققها عامل التكميل $\rho(x,y)$ وحلها يعطي عـــامل التكميل المطلوب. ولكن حل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية أصعب من حل المعادلـــة التفاضلية الأصلية. وسنستعرض حالات خاصة:

1- إذا كان $\rho(x,y)=c$

عندها يكون

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=o$$

ويكون $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ أي أن المعادلة التفاضلية تامة و منه نقول إذا كانت المعادلـــة التفاضلية تامة, فأي عدد ثابت هو عامل تكميل لهذه المعادلة.

2- إذا كان $\rho=\rho(x)$

فعندها يكون $\frac{\partial\rho}{\partial y}=o \quad , \quad \frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{d\rho}{dx}$

فالمعادلة (17) تصبح من الصورة :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$$

وكون الطرف الأيسر فرضاً دالة من x فقط يتطلب أن يكون الطرف الأيمن أيضـــاً دالة من x فقط .

وبالتالي : $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=f(x)$

$$\ln\rho=\int f(x)dx \Rightarrow \int = e^{\int f(x)dx} \qquad \textbf{(18)}$$

مثال -3-

جد معامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy + x = o$$

الحـــل:

نكتب المعادلة على الصورة القياسية التالية :

$$(x - 2xy)dx + dy = o$$

أي $\quad M(x,y) = x - 2xy \quad , \quad N(x,y) = 1$

ومنه $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = o$

وهذا يعني أن المعادلة التفاضلية غير تامة.

ونلاحظ أن

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -2x = f(x)$$

وعلى ذلك يكون معامل التكميل من الصورة : $\rho = \rho(x)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = -2x \Rightarrow \rho(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

وبضرب المعادلة في $\rho(x)$ تصبح تامة ويمكن حلها بإحدى الطرق المذكورة سـابقاً.

ويكون الحل من الصورة : $y = \frac{1}{2} + A.e^{x^2}$

3- إذا كان $\rho = \rho(y)$.

عندها يكون $\quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dy} \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = o$

ويصبح الشرط على الشكل التالي:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dy} = -\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = g(y)$$

وكون الطرف الأيسر دالة من y فقط يتطلب أن يكون الطرف الأيمن أيضا دالة مـــن y فقط.

وبالتالـــي :
$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dy} = g(y)$$

أو

$$\ln\rho = \int g(y)dy \Rightarrow \rho(y) = e^{\int g(y)dy} \qquad \textbf{(19)}$$

مثال -4-

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية :

$$2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = o$$

الحـــل :

هذه المعادلة من الصورة القياسية : $M(x,y)dx + N(x,y)dy = o$

أي :
$$M(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

و:
$$N(x,y) = y^2 - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -6x$$

إذن المعادلة غير تامة :

ونلاحظ أن :
$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{4}{y} = g(y)$$

إذن : $\rho = \rho(y)$ ومنه:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dy} = -\frac{4}{y} \Rightarrow \rho(y) = 1/y4$$

وبضرب المعادلة المعطاة $\rho = \rho(y)$ تصبح تامة ويكون حلها من الشكل :

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = A$$

4- إذا كان عامل التكميل من الشكل $\rho = \rho(x.y)$

نأخذ $t = x.y$ فيكون:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = y\frac{d\rho}{dt} \qquad , \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = x\frac{d\rho}{dt}$$

ويصبح الشرط :

$$\frac{d\rho/dt}{\rho} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{yN - xM} \qquad \textbf{(20)}$$

إذا عوضنا y بعبارتها $y = \frac{t}{x}$ في الطرف الثاني وكان الناتج أن الطرف الثاني للشرط السابق غير متعلق بالمتغير x فيكون عامل التكميل من الشكل المفروض والحصول علية سهل.

وذلك ينتج من مكاملة المعادلة (20) وأخذ أحد الحلول الخاصة. أما إذا كان الطرف الثاني تابعاً للمتغير x أيضاً فالفرض خاطئ ويجب أن نفتش عن شكل أخر لعامل التكميل.

<u>مثال -5-</u>

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y(1+xy)dx + x(1-xy)dy = o$$

الحــل :

لدينا في هذه الحالة :

$$M(x,y)=y(1+xy)\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy$$

$$N(x,y)=x(1-xy)\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=1-2xy$$

ومنه يصبح الشرط (20) من الصورة :

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=-\frac{2}{xy}=-\frac{2}{t}\Rightarrow\rho(t)=t^{-2}$$

أي :

$$\rho(x,y)=\frac{1}{x^2y^2}$$

وبضرب المعادلة التفاضلية المعطاة في عاملها التكميلي تصبح تامة ويكون حلها مـن الشكــل :

$$In\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}=A \qquad , \qquad A= \text{ثابت اختياري}$$

5- إذا كان $\rho=\rho(x+y)$

في هذه الحالة نضع $t=x+y$ وعندها يكون:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\rho}{dt} \qquad , \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{\partial\rho}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\rho}{dt}$$

ويصبح الشرط :

$$\frac{d\rho/dt}{\rho}=\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N-M} \qquad \textbf{(21)}$$

إذ عوضنا في الطرف الثاني في المعادلة السابقة كل x بـــالمتغير $(t-y)$ وكـــان الناتــج فــي الطـــرف الثانـــي دالـــة المتغير t فقط فيكون عامل التكميل من الشكل المفروض . والحصول علية سهل وذلك يكون بالمكاملة وإلا الفرض خاطئ ويجب أن نفتش عن عامل تكميل من شكل أخر .

مثال -6-

جد عامل تكميل المعادلات التفاضلية التالية:

$$(x^2-y^2+2x)dx+(x^2-y^2-2y)dy=o$$

الحـــل :

واضح أن المعادلة التفاضلية المعطاة غير تامة لأن :

$$M(x,y)=x^2-y^2+2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=-2y$$

$$N(x,y)=x^2-y^2+2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

فلنفتش عن عامل تكميل من الشكل $\rho=\rho(t)$ حيث $t=x+y$

فيصبح الشرط (21) من الصورة :

$$\frac{1}{\rho}.\frac{d\rho}{dt}=\frac{-2(x+y)}{-2(x+y)}=1 \Rightarrow \quad \rho=e^t=e^{x+y}$$

وبضرب المعادلة التفاضلية في معاملها التكميلي تصبح تامـــة ويكـــون حلـــها مـــن الصورة:

$$e^{(x+y)}(x^2-y^2)=A \qquad : \qquad A= \text{ثابت اختياري}$$

6- إذا كانت المعادلة $M(x,y)dx+N(x,y)=o$ متجانسة فإن عامل التكميـــل يعطي بالعلاقة :

$$\rho(x,y)=\frac{1}{xM+yN} \qquad \mathbf{(22)}$$

ويمكـــن إثبات هذا باستعمال نظرية أويلر Euler للدوال المتجانسة التـــي تنـص علـــى أن :

إذا كانت $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فإن :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf \qquad (23)$$

ونترك إثبات ذلك للقارئ ..

مثال -7-

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^2dx+(x^2-y^2-xy)dy=o$$

الحـل:

لدينا : $$M(x,y)=y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2y$$

و $$N(x,y)=x^2-xy-y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=2x-y$$

إذن المعادلة غير تامة, ولكن نلاحظ أن المعادلة المعطاة هي معادلة متجانسة. وعلى ذلك يكون معامل التكميل من الصورة :

$$\rho(x,y)=\frac{1}{xM+yN}=\frac{1}{y(x^2-y^2)}$$

وبضربة في المعادلة التفاضلية تصبح تامة ويكون حلها من الصورة :

$$y^2(x-y)=A(x+y)$$

حيث A ثابت اختياري .

7- إذا كان :

$$M(x,y)=yf_1(xy) \quad , \quad N(x,y)=xf_2(xy) \tag{24}$$

فإن عامل التكميل يكون من الصورة :

$$\rho(x,y)=\frac{1}{xM-yN} \tag{25}$$

بشرط أن لا ينعدم المقدار $xM-yN$

ولإثبات ذلك نلاحظ أنه كي تكون المعادلة التفاضلية :

$$\rho(x,y)Mdx+\rho(x,y)Ndx=o \tag{26}$$

• معادلة تامة يجب أن يكون:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho M)=\frac{\partial}{\partial x}(\rho N)$$

ولكن :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho M)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{M}{xM-yN}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f_1(xy)}{x(f_1(xy)-f_2(xy))}\right]$$

$$=\frac{f_1\dfrac{\partial f_2}{\partial y}-f_2\dfrac{\partial f_1}{\partial y}}{x(f_1-f_2)^2}$$

بالمثل :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho N)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N}{xM-yN}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f_2}{y(f_1-f_2)}\right]$$

$$= \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x}}{y(f_1 - f_2)^2}$$

وبما أن $x\frac{\partial f(xy)}{\partial y} = y\frac{\partial f(xy)}{\partial x}$ فإنه ينتج أن :

$$\frac{\partial}{xy}\left[\frac{M}{xM - yN}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N}{xM - yN}\right]$$

وهذا هو المطلوب .

أما إذا أنعدم المقدار $xM - yN$ فهذا يعني أن :

$$xM = yN$$

وتصبح المعادلة (26) من الصورة : $ydx + xdy = o$

وحلها هو:

$$xy = A$$

مثال -8-

جد عامل تكميل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y(2xy+1)dx + x(1+2xy - x^3y^3)dy = o$$

الحــل:

هذه المعادلة غير تامة. ولكن نلاحظ أن :

$$M = y(2xy+1) = yf_1(xy)$$

و

$$N = x(1+2xy - x^3y^3) = xf_2(xy)$$

وبالتالي معامل التكميل هو من الصورة (25) أي:

$$\rho(x,y)=\frac{1}{xM-yN}=\frac{1}{x^4y^4}$$

وبضرب المعادلة في عامل التكميل تصبح تامة . ويكون حلها من الصورة :

$$y=Ae^{-\frac{3xy+1}{3x^3y^3}}$$

حيث A ثابت اختياري .

8- بصورة عامة نفرض $\rho=\rho(t)$ حيث $t=f(x,y)$ و f دالـــة مفروضـــة ويكون عندئذ :

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{d\rho}{dt}$$

ويصبح الشرط :

$$\frac{d\rho/dt}{\rho}=\frac{\partial M/\partial x-\partial N/\partial y}{N\dfrac{\partial t}{\partial x}-M\dfrac{\partial t}{\partial y}} \qquad \textbf{(22)}$$

إذا عوضنا كل y بقيمتها المستخرجة من التابع $t=f(x,y)$ كـــان الطـــرف الثـــاني للشرط تابعا فقط للمتغير t فيكون كامل التكميل من الشكل المفروض والحصول عليـة سهل. وإلا يجب تغيير شكل الدالة f .

وفيما يلي جدول لبعض مجموعات حدود وعامل التكميل الذي يحول كل مجموعة إلى تفاضل تام.

مجموعة الحدود	عامل التكميل	التفاضل التام
$ydx - xdy$	$-1/x^2$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(y/x)$
$ydx - xdy$	$1/y^2$	$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d(x/y)$
$ydx - xdy$	$-1/xy$	$\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln y/x)$
$ydx - xdy$	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\tan^{-1} y/x)$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{x\ y}$	$\frac{ydx + xdy}{xy} = d(\ln xy)$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{(xy)^n}$ $n > 1$	$\frac{ydx + xdy}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2} In(x^2 + y^2)\right]$
$ydx + xdy$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$ n	$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right]$
$2xydx - x^2dy$	$1/y^2$	$\frac{2xydx - x^2dy}{y^2} = d(\frac{x^2}{y})$

جدول I – عوامل التكميل لبعض مجموعات الحدود.

تمـــاريـــــــــن

I- هل المعادلات التفاضلية التالية تامة أو غير تامة، إذا كانت تامة - جد الحل - :

1/ $y' = \dfrac{y^2 e^{xy^2} + x^2}{y^2 - 2xye^{xy^2}}$

2/ $y' = \dfrac{1 - 2xy^2}{2xy^2 + y^2}$

3/ $(3x^2y^2 + \dfrac{1}{x})dx + (2x^3y - 1)dy = o$

4/ $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = o$

5/ $(2x\sin x^2 + 3\cos y)dx - 3x\sin y dy = o$

6/ $y' = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$

7/ $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = o$

8/ $(e^x \sin y + 3y)dx - (3x - e^x \sin y)dy = o$

9/ $(4x^3y^2 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = o$

10/ $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = o$

11/ $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = o$

12/ $(x\ln y + xy)dx + (y\ln x + xy)dy = o \quad , \quad x > o \quad , \quad y > o$

II- جد عامل تكميل كل من المعادلات التفاضلية التالية ، ثم جد حلها ؟

1/ $y' - 2xy + x = o$

2/ $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = o$

3/ $(x^3 + xy^4)dx + 2y^3dy = o$

4/ $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = o$

5/ $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = o$

6/ $y' = e^{3x} + y - 1$

7/ $(1 - 2xy^2)dx + 2xy(1 - x - xy^2)dy = o$

8/ $dx + (\frac{x}{y} - \sin y)dy = o$

9/ $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = o$

10/ $e^x dx + (e^x \tan^{-1} y + 2y + \cos^{-1} y)dy = o$

11/ $y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = o$

12/ $y' = \frac{y^2}{y^2 + xy - x^2}$

13/ $y' = \frac{2xy^2 + y}{x^4y^2 - 2x^2y - x}$

14/ $(3x + \frac{6}{y}) + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})y' = o$

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولي

Linear First Order Differential Equations

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولي

Linear First - Order Differential Equations

IV.1ـ المعادلة التفاضلية الخطية — Linear Differential Equation

سبق أن عرفنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ويهمنا هنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى والتي تكتب على الصورة :-

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان في المتغير n فقط .

وهذه المعادلة ليست علي وجه العموم معادلة تفاضلية تامة ولكن يمكن إيجاد عامل تكميل يحولها إلى معادلة تفاضلية تامة ونقول بانها خطية وبدون طرف ثان إذا كان $Q(x) = 0$ أي أن شكلها :-

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (2)$$

وتسمى الدالة $Q(x)$ بالطرف الثاني للمعادلة .

ونلاحظ أن هذه المعادلة (2) أنها منفصلة المتحولات وتكتب على الشكل :

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

وتكاملها هو :- $\quad y = Ae^{-\int P(x)dx}$

IV ـ2. نظرية 1:ـ

لكل معادلة تفاضلية خطية من الشكل (1) عامل تكميل دالة من (x) فقط على الشكل التالي :

$$\rho(x) = e^{\int P(n)dn} \qquad (3)$$

البرهان :-

لنكتب المعادلة (1) على الشكل التفاضلي التالي :-

$$[p(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \qquad (4)$$

حيث $M(x,y) = P(x)y - Q(x) \quad , \quad N = 1$

وبما أن $P(x) \neq 0$ فالمعادلة (4) غير تامة لأن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

أذن $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial y}$

ومن جهة أخرى فان :-

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = P(x)$$

بناءا على الفقرة III -3-ب-2- فان عامل التكميل e يكون دالة من x فقط ويجب أن يحقق الشرط :

$$\frac{d\rho}{\rho} = P(x)dx$$

ومنه فان $\rho(x) = e^{\int P(x)dx}$

وهو عامل تكميل للمعادلة (4) .

IV.3ـ نظريــة 2:ـ

إن حل كل معادلة تفاضلية خطية ومن الرتبة الأولى هو دالة خطية بالنسبة لثابت اختياري . والعكس صحيح :-

البرهان :-

لزوم الشرط :-الفرض :- $y' + P(x)y = Q(x)$

الطلب : حلها من الشكل :- $y = Cf_1 + f_2$

بضرب طرفي المعادلة في المعادلة في عامل التكميل $\rho(x)$ نجصل على :-

$$\rho\ y' + \rho\ P(x)y = \rho\ Q(x)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل : $\frac{d}{dx}(\rho y) + y\left(\rho P - \frac{d\rho}{dx}\right) = \rho Q$

وبما أن : $\frac{d\rho}{dx} = P(n)\rho$

فان : $\frac{d}{dx}(\rho y) = \rho Q$

بالمكاملة نحصل على :- $y = \rho(x)Q(x)dx + A$

أو $$y = \frac{1}{\mu}\left[\int \rho(x)Q(x)dx + A\right]$$

وبفك الأقواس و بتعويض عن $\int$ يكون الحل من الشكل :-

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(n)dx} dx + Ae^{-\int P(n)dx}$$

ونلاحظ أن الطرف الثاني عبارة عن مجموع دالتين معلومتين . إحداهمـــا مضروبـــة بثابت اختياري A أي من الشكل :

$$y = Af_1(x) + f_2(x) \qquad (x)$$

وهو المطلوب .

كفاية الشرط : الفرض لدينا الدالة $y = Af_1(x) + f_2(x)$

حيث A ثابت اختياري f_2 و f_1 دالتان معلومتان

الطلب : إن المعادلة التفاضلية لهذه الدالة ومن المرتبة الأولى

بالاشتقاق بالنسبة إلي (x) نجد :

$$y' = Af_1'(x) + f_2'(x)$$

ومن الأولى والثانية نجد :

$$\frac{y' - f_2'}{y - f_2} = \frac{f_1'}{f_2}$$

وبالترتيب نجد :

$$y' - \frac{f_1'}{f_1} y = \frac{f_1' f_2 - f_2 f_1}{f_1}$$

وهي توضح على الشكل آلاتي : $y' + P(x)y = Q(x)$

وهو المطلوب .

<u>نتيجة -1-</u>

مما سبق نخلص إلى أن حل المعادلة التفاضلية الخطية (1) من الشكل :-

$$y = Ae^{\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx \qquad \textbf{(6)}$$

نتيجة –2–

إذا كانت المعادلة التفاضلية (1) بدون طرف أي لا تحوي على $Q(x)$ فعندها نقول بان $Q(x)=0$ والحل ينتج من الحل العام بوضع $Q(x)=0$ فنجد حلها :

$$y = Ae^{-\int P(x)dx} = Af_1$$

أما ذا وضعنا $A=0$ في الحل العام حلا خاصا للمعادلة (1) مع طرف وهو :–

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx = f_2$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية مع طرف هو مجموع حلين أولهما الحل العام لمعادلة بدون طرف وهو Af_1 الدالة المتممة (Complementary Function) وثانيهما الحل الخاص للمعادلة مع طرف وهو f_2 أي :

$$y = Af_1 + f_2$$

ملاحظة :–

هناك طريقة أخرى لحل المعادلات (1) أي :–

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

تدعى طريقة تحويل الثابت ونطبقها كما يلي :–

نأخذ المعادلة المعطاة ونضع الطرف الثاني صفرا فينتج :

$$y' + P(x)y = 0 \qquad (7)$$

وحلها كما وجدنا هو

$$y = A_1e^{-\int P(x)dx} \qquad (8)$$

حيث A ثابت اختياري إلا أن نجعل A دالة للمتغير x بحيث تكون الدالة المعينة بالعلاقة (7) حلا للمعادلة مع طرف . وحتى تكون هذه الدالة حلا للمعادلة (1) يجب أن تحقق المعادلة لذلك نعوض (8) في (7) مع العلم بان A دالة من x فنجد من أن :-

$$y' = A_1'(x)e^{-\int P(x)dx} - A_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

بالتعويض في (1) نجد $A_1'e^{-\int P(x)dx} - A_1\ell e^{-\int P(x)dx} + A_1 Pe^{-\int P(x)dx} = \mathrm{Q}(x)$

ومنه $A_1' = e^{\int P(x)dx}.\mathrm{Q}(x)$

بالمكاملة نجد : $A_1 = \int e^{\int P(x)dx}\mathrm{Q}(x)dx + A$

وبتعويض A بقيمته في (8) نحصل على الحل العام التالي :-

$$y = Ae^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}\mathrm{Q}(x)dx$$

<u>مثال -1-</u> : حل المعادلة التفاضلية : $xy' - 2y - x^3e^x = 0$

الحل :- نضع هذه المعادلة على الصورة التالية :

$$y' + \left(-\frac{2}{x}\right)y = x^2e^x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية فيها $P(x) = -2/x \quad , \quad \mathrm{Q}(x) = x^2.e^x$

وعامل التكميل يكون من الشكل :

$$\rho = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

ويكون الحل من الشكل التالي :

$$\frac{1}{x^2}y = \int x^2 e^x . \frac{1}{x^2} dx + A = e^x + A$$

أو

$$y = x^2 . e^x + Ax^2$$

IV ـ4ـ المعادلات التي يمكن إرجاعها إلى معادلات خطية :ـ

هناك كثير من المعادلات التي يمكن إرجاعها إلى معادلات خطية وذلك إمـــا بتغـــير الدالة أو تغير المتحول أو تغير كليهما معاً إلى دالة متحول جديدين ونذكر منها علـــى سبيل المثال المعادلة التالية :

$$\frac{1}{y'} + P(y)x = Q(y) \qquad (9)$$

التي تكتب على الشكل :-

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

وهي خطية بالنسبة للدالة x والمتحول y وهناك بعض الأنواع الآخر.

IV ـ4ـ1ـ معادلة بيرنولي التفاضلية (Bernoulli's Diffecential Equation)

تعريفها وشكلها العام :-

كل معادلة من الشكل

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (10)$$

تسمى معادلة بيرنولي حيث n ثابت معلوم ومن اجل $n = 1$ نحصل علـــى الشـــكل الخاص لها وهو المعادلة الخطية بدون طرف ، ومـــن اجـــل $n = 0$ نجـــد المعادلـــة الخطية مع طرف وقد سبق دراسة هاتين الحالتين ، أمـــا فـــي حالـــة $n \neq 0.1$ فـــان المعادلة غير خطية ولدينا النظرية التالية :

نظرية –3–

أن معادلة بيرنولي (10) ترد إلى خطية من المرتبة الأولى بأجراء تغيير في الدالة من y ألي ϑ حيث :

$$\vartheta = \frac{1}{y^{n-1}} \qquad (11)$$

البرهان :–

لنقسم المعادلة (10) على y^n فنجد :–

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(n)}{y^{n-1}} = Q(n)$$

وبفرض أن :
$$\vartheta = \frac{1}{y^{n-1}}$$

ويكون :
$$\vartheta' = \frac{1-n}{y^n} . y'$$

ومنه :
$$\frac{y'}{y^n} = \frac{\vartheta'}{1-n}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :–

$$\vartheta' + (1-n)P(x)\vartheta = (1-n)Q(x)$$

التي هي من الشكل :

$$\vartheta' + P_1(x)\vartheta = Q(x)$$

وهي معادلة خطية بالنسبة للدالة ϑ والمتحول x وبحلها نجد :–

$$\vartheta = Af_1(x) + f_2(x)$$

والرجوع للمتحول الأصلي نجد :

$$y = \left[A f_1(x) + f_2(x) \right]^{1/1-n}$$

<u>مثال -2-</u> حل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^3$$

الحــل :-

هذه معادلة بيرنولي التفاضلية حيث $n = 3$ بالقسمة على y^3

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = x$$

$$\frac{1}{-2}\frac{d}{dx}\left(y^{-2}\right) + 2x\left(y^{-2}\right) = x$$

بوضع $\vartheta = y^{-2}$ تتحول هذه المعادلة إلى :-

$$\frac{d\vartheta}{dx} - 4x\vartheta = -2x$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي :

$$\rho = e^{\int -4x dx} = e^{-2x^2}$$

$$e^{-2x^2}\vartheta = \int (-2x) e^{-2x^2} dx + A = \frac{1}{2}\int e^{2x^2} d\left(-2x^2\right) + A$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}$$

بالتعويض عن $\vartheta = y^{-2}$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}$$

$$y^2 = \frac{2}{1 + Be^{2x2}}$$

حيث $B = 2A$ ثابت اختياري .

IV ـ2.4ـ معادلـة ريكاتـي التفاضليـة : (Riccati's Differential Equation)

تعريفها :-

كل معادلة من الشكل :-

$$y' + P(x)y^2 + R(x)y + Q(x) = 0 \qquad (12)$$

تسمى معادلة ريكاتي . واحد أشكالها الخاصة هو عندما يكون $Q(x) = 0$ حيث تصبح معادلة بيرنولي التي درسناها سابقا .

أو عندما يكون $P(x) = 0$ حيث تصبح معادلة خطية ويمكن تحويلها إلى خطية من المرتبة الثانية التي ترجئ دراستها الآن .

تمـــــاريـــــن

-I- حل المعادلات التفاضلية التالية:

1- $\sin x.\frac{dy}{dx} = y\cos x = \sin x - x\cos x - 1$

2- $\frac{dy}{dx} + y = \sin x, \qquad y(\pi) = 1$

3- $(y - x\sin x^2)dx + xdy = o$

4- $(y - 2xy - x^2)dx + x^2 dy$

5- $y' + \frac{1}{x}y = \sin x$

6- $x^2 y' + 3xy = \frac{1}{x}\sin x$

7- $xy' + 2y = x^2 - x + 1 \qquad , y(1) = 1/2$

8- $xy' + y = e^x \quad , \quad y(1) = 1$

9- $y' + \frac{1}{xInx}y = 1/2$

-II حل المعادلات التفاضلية التالية:

1- $\sin y.\frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y)$

2- $y' + xy = 6x\sqrt{y} \quad , \quad y(10) = 1$

3- $y' + 2xy + xy^4 = o$

4- $(x - y)dx + xdy + x(xdy + xdy) = o$

$$ydx-(x+2y^2)dy=o$$ -5

$$x^2y'+2xy-y^3=o$$ -6

$$(2xy-\frac{-xe^{-x^2}}{y^3})dx+dy=o$$ -7

$$xy'+y=y^2\text{Inx}$$ -8

III - حول معادلة ريكاتي إلى معادلة خطية من المرتبة الثانية :

$$\gamma'+p(x)\gamma+R(x)\gamma^2+Q(x)=o$$

بإجراء التغيير التالي :- $\underline{R}y=\frac{\Im'}{\Im}$

IV- برهن أنه إذا كان f_1 حلاً خاصاً للمعادلة التالية :

$$y'+p(x)y=\Re_1$$

و f_2 حلاً خاصاً للمعادلة التالية:

$$y'+p(x)y=\Re_2$$

فعندها f , حيث $f=f_1+f_2$ ، هو حل خاص للمعادلة :

$$y'+p(x)=\Re_1+\Re_2$$

ماذا نستنتج من ذلك :

V- حول المعادلة التالية إلى معادلة بيرنولي :

$$p(y/x)dx+q(y/x)dy+x^nd(y/x)=o$$

باستخدام التعويض $\vartheta=y/x$.

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ومن الدرجة العليا

Differential equations of first order and higher degree

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ومن الدرجة العليا

Differential equations of first order and higher degree

Vـ 1 ـ تعريـف :ـ **Definition**

سبق أن عرفنا درجة (degree) المعادلات التفاضلية بأنها قوة أعلي مشـتقة داخلة في هذه المعادلة بعد وضعها علي صورة قياسية وصحيحة . ويهمنا فـي هـذا الفصل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى أي التي تحتوي علي المشتقة الأولـى فقط لكن مرفوعة لقوة صحيحة اكبر من الواحد أي التي على الصورة

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = o \qquad (1)$$

أو

$$F(x, y, p) = o \quad : \quad p = \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

وقوة P هي درجة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي

والصورة العامة للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة $n > 1$ هي :-

$$F_n(x, y)p^n + F_{n-1}(x, y)p^{n-1} + ... + F_1(x, y)p + F_o(x, y) = o \qquad (3)$$

ولا توجد طريقة أو طرق عامة لحل مثل هذه المعادلات ؛ ومع ذلك يمكن حل بعـض هذه المعادلات عن طريق اختزالها إلي معادلات تفاضلية من المرتبة الأولـى ومـن الدرجة الأولى تحل بإحدى الطرق المقفلة أو العددية ومن الحالات القابلة للحل نذكـر ما يلـــي :-

Equation Solvable For P :   V ـ2 ـ معادلات تحل في P :

باعتبار أن المعادلة (3) هي كثيرة حدود من الدرجة n في P ؛ فإنه قد يمكن تحليلها إلى n من العوامل الخطية حسب نظرية الجبر لتصبح على الصورة :-

$$[p-f_1(x,y)][p-f_2(x,y)]..[p-f_n(x,y)]=o \quad (4)$$

مما يعني انعدام كل عامل على حدة وبالتالي :-

$$P=\frac{dy}{dx}=f_1(x,y)\Rightarrow \text{حلها} \quad g_1(x,y,A)=o \quad (5)$$

$$P=\frac{dy}{dx}=f_2(x,y)\Rightarrow \text{حلها} \quad g_2(x,y,A)=o \quad (6)$$

$$P=\frac{dy}{dx}=f_n(x,y)\Rightarrow \text{حلها} \quad g_n(x,y,A)=o \quad (7)$$

وذلك باستخدام أي من الطرق السابقة لحل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ويكون الحل العام للمعادلة (3) هو حاصل ضرب الحلول الفردية أي :

$$g_1(x,y,A)g_2(x,y,A)...g_n(x,y,A)=o \quad (8)$$

لأن أي حل خاص للمعادلة التفاضلية يعدم أحد أقواس الحل العام وبالتالي جميع الحلول للمعادلة التفاضلية موجودة في الحل العام .

ملاحظة :-

لقد استخدمنا نفس الثابت الاختياري A في الحلول الفردية (5) وذلك لأن المعادلة التفاضلية (3) من المربتة الأولى وبالتالي فأساسيها (8) تحتوي علي ثابت اختياري واحد .

مثال -1- حل المعادلة التفاضلية :-

$$P^2+(x+y-10)p+2(5-y)(y-x)=o, P=\frac{dy}{dx}$$

الحــل : المعادلة المعطاة هي معادلة جبرية من الدرجة الثانية في ρ حلها هو :

$$P=\frac{1}{2}\left\{-(x+y-10)\pm\left[(x+y-10)^2-4\times 2(5-y)(y-x)\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-(x+y-10)\pm\left[x^2+gy^2-6xy+20x-60y+100\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-(x+y-10)\pm\left[(x-3y+10)^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{-(x+y-10)\pm(x-3y+10)\}$$

$$P=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[-(x+y-10)+(x-3y+10)\right]=2(5-y)\\ \frac{1}{2}\left[-(x+y-10)-(x-3y+10)\right]=y-x\end{cases}$$

المعادلة : $P=2(5-y)$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى حلها : $y(x)=5+Ae^{-2x}$

والمعادلة : $P=y-x$

هي أيضاً معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى حلها : $y(x)=1+x+Ae^{x}$

وعلي ذلك فالحل العام للمعادلة المعطاة هو حاصل ضرب الحلين الفرديين بعد وضعهما على الصورة الصفرية :

$$(y-5-Ae^{-2x})(y-1-x-Ae^{x})=o$$

والحل العام يحتوي علي ثابت اختياري واحد A كما هو متوقع .

3.V معادلات تحل في y Equations solvable For y :

وهي التي على الصورة :

$$y = f(x, p) : P = \frac{dy}{dx} \qquad (9)$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى x وملاحظة أن $P = \frac{dy}{dx}$ نجـد :-

$$\frac{dy}{dx} = P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

أو

$$\frac{dp}{dx} + (\frac{1}{-\partial f/\partial x})p = \frac{\partial f/\partial x}{-\partial f/\partial p}$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى في P متغيرها المستقل x وبالتالي بفرض إمكانية الحل يمكن وضع حلها العام على الصورة :

$$x = g(p, A) \qquad (10)$$

حيث A ثابت اختياري وإذا أمكن حذف P بين (9) و(10) نحصل علي علاقة بين x, y بدلالة ثابت اختياري A وهذه العلاقة هي الأساسية المطلوبة للمعادلة (9) ، على أنه يمكن كتابة المعادلتين (9) و(10) علي الصورة :

$$\chi = g(p, A)$$
$$y = f[g(p, A), p]$$

وهما معادلتان بارامتريتان في P

مثال -2-

حل المعادلة : $p = \dfrac{dy}{dx} \quad : \quad y = x + \ln p$

الحل : بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى x نجـد :

$$\frac{dy}{dx} = p = 1 + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

أذن

$$dx = \frac{1}{p(p-1)}dp = \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right]dp$$

ومنه

$$x = \ln(p-1) - \ln p + A = \ln\frac{p-1}{p} + A$$

وعلى ذلك يكون الحل العام البارامتري للمعادلة المعطاة بدلالة البارامتر p هو :-

$$x = \ln\frac{p-1}{p} + A$$

$$y = x + \ln p = \ln(p-1) + A$$

ويمكن بالطبع حذف P بين هاتين المعادلتين للحصول على علاقة صريحة بين y, x ولكنها ستكون علاقة معقدة .

V-4- معادلات تحل في x : Equations Solvable For x :

هي التي على الصورة :

$$P = \frac{dy}{dx} \quad \text{و} \quad x = g(y, p) \qquad \textbf{(11)}$$

ويتبع في حلها خطوات مماثلة للحالة الثانية لكن بتبديل y, x

مثال -3- .

حل المعادلة : $\quad y = x + \ln p \qquad P = \dfrac{dy}{dx}$

الحــل :- يمكن كتابة المعادلة التفاضلية السابقة على الصورة :

$$x = y - \ln p$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى y ومراعاة أن $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{p}$ نحصل على :-

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p}\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{1}{p-1}dp = dy$$

أو

$$y = \ln(p-1) + A$$

وبالتعويض عن y في المعادلة الأولى ينتج :

$$x = \ln\left(\frac{p-1}{p}\right) + A$$

وهو نفس البارامتري الذي حصلنا عليه في المثال السابق :

V- 5- معــادلـــة كليـــرو **Clairaut's Equation**

وهي معادلة تفاضلية من الشكل :

$$y = px + f(p) \quad ; \quad p = \frac{dy}{dx} \tag{12}$$

وهذه من نوع المعادلات (الحالة الثانية) التي تحل في y وسنرى الآن أساسية هـذه المعادلة أي حلها العام هو :-

$$y = Ax + f(A) \qquad (13)$$

وهو عبارة عن طائفة من المستقيمات نحصل عليها بوضع ثابت اختياري A محـــل المشتقة $p = \frac{dy}{dx}$ في معادلة كليرو ..

الإثبات :

بمفاضلة (12) بالنسبة إلى x :

$$\frac{dy}{dx} = p = p + [x + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

أو

$$\frac{dp}{dx}[x + f'(p)] = o$$

الحالة الأولى :

$$\frac{dp}{dx} = o \Rightarrow p = A$$

وبالتعويض عن $p = A$ في (12) نحصل على الحل العام $y = Ax + f(A)$

الحالة الثانية :

$$x + f'(p) = o$$

وهذه المعادلة مع (12) تعطي حلاً منفرداً على صورة بارامترية وهو عبـــارة عـــن غلاف لطائفة المستقيمات (13) .

<u>مثال -4-</u>

حل المعادلة $p = \frac{dy}{dx}$; $y = px + \sqrt{p^2 + 1}$

الحـــل :

هذه معادلة كليرو فيها $f(p)=\sqrt{p^2+1}$

وبالتالي فحلها العام هو :

$$y=Ax+\sqrt{p^2+1} \qquad (14)$$

وهو طائفة من المستقيمات ميلها A وتقطع جزءاً قدره $\sqrt{A^2+1}$ مـــن المحـــور الراسي ولإيجاد الحل المنفرد نستخدم (13)

$$x+\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}=o \Rightarrow x=-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \qquad (15)$$

بالتعويض عن x في المعادلة المعطاة . أذن

$$y=\frac{p^2}{\sqrt{p^2+1}}+\sqrt{p^2+1}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \qquad (16)$$

وتعطى المعادلتان (15) و (16) الحل المنفرد بارامتريا بحذف البارامتر p نحصـــل على الصورة الصريحة للحلِ المنفرد :

$$x^2+y^2=1$$

هـــي دائرة مركزهـــا نقطـــة الأصـــل ونصـــف قطرهـــا الوحـــدة وتغلـــق طائفـــة المستقيمـــــــات (14).

تمــــاريــــن

$\underline{I}$ - معادلات تحل في P .

حل المعادلات التفاضلية التالية حيث : $P=\dfrac{dy}{dx}$

$$p^4+(x-y+1)p^3+(x-y-xy)p^2-xyp=o$$

$$x(x-2)p^2+(2y-2xy-x-2)p+(y^2+!!)=o$$

$$x^2p^2+xyp-6y^2=o$$

$$y^2p^2+3xp-y=o$$

$\underline{II}$ - معادلات تحل في x أو في y :

حل المعادلات التفاضلية التالية حيث $\rho={dy}/{dx}$

$$\rho^2-xp+y=o$$

$$y=(p+2)x+p^2$$

$$yp^2-2xp+y=o$$

$$y=xp+x^2p^2$$

$$y=-xp-\frac{1}{x^2p}$$

$\underline{III}$ - معادلات كليرو :

حل المعادلات التفاضلية التالية حيث $p={dy}/{dx}$

$$y=px+\sqrt{p^2+1}$$

(باستخدام تحويل مناسب حولها $yp^2-2xp+y=o$ إلى معادلة كليرو)...

$$y=xp-2p^2$$

الفصل السادس

تطبيقات مختلفة على المعادلات التفاضلية

Different Applications or Differential Equations

الفصل السادس

تطبيقــات مختلفــة علــى المعــادلات التفاضليــة

Different Applications On Differential Equations

VI ـ 1 ـ مقدمـــة :ـ

لقد قلنا سابقا أن العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسالة فيزيائيـــة أو هندسية تظهر على صورة معادلة تفاضلية .
إذن فالمعادلات التفاضلية تدخل في شتى مجالات العلوم الفيزيائيـــة والهندســية بـــل والإنسانية . وفيما يلي مجموعة من الأمثلة التطبيقية المتنوعة جـــزء منـــها هندســية والأخرى فيزيائية .

VI ـ 2 ـ تطبيقــات هندسيــة :ـ

أن كل علاقة من الشكل $F(x,y,y')=o$
فهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى
وواضح أنها عبارة عن علاقة ما بين إحداثيات نقطة ما مثل $M(x,y)$ وميل الممـــاس للمنحنى المار من تلك النقطة . وكل منحنى يمر من النقطة M وميل مماســـه يحقـــق المعادلة التفاضلية فهو منحنى تكاملي . ومن ذلك نستنتج أن المعادلة التفاضلية هـــي علاقة بين إحداثيات نقطة من منحنى وميل المماس لهذا المنحنى في تلك النقطة .
إذن كل مسألة هندسية تتعلق بإحداثيات النقطة وميل المماس فيها هي معادلة تفاضليـــة من الرتبة الأولـــــى .

المثال الأول :-

أعطيت طائفة منحنيات أولى معادلتها التفاضلية هي :

$$F(x, y, y') = o \qquad (1)$$

i – أثبت أن المعادلة التفاضلية لطائفة المنحنيات التي يقطع كل عضو منها جميع أعضاء الطائفة الأولى بزاوية $\propto$ هي :

$$F(x, y, \frac{y'-k}{1+ky'}) = o \qquad (2)$$

حيث $k = \tan (\propto)$

وتسمى الطائفة الثانية بالمسارات $\propto$ (المسارات المائلة) للطائفة الأولى .

ii – اثبت أن المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة على الطائفة الأولى أي $\propto = 90^o$ هي :

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = o \qquad (3)$$

iii – جد معادلة طائفة المنحنيات التي تقطع طائفة القطع المكافئة $y = (x - A)^2$ حيث A بارامتر بزاوية $\pi/4$ عند أي نقطة في الربع الأول .

iv– جد معادلة المسارات المتعامدة مع طائفة المنحنيات (الدوائر)

$$x^2 + y^2 + cx = o$$

حيث C بارامتر .

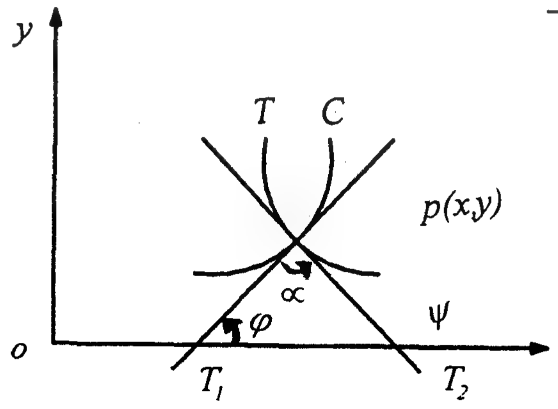
الحــل :

i- المسارات المائلة :

ليكن C منحنياً من مجموعة المنحنيات التكاملية للمعادلة التفاضلية (i) :

$$F(x_c, y_c, y'_c) = o \qquad (\text{i})$$

ليكن T مساراً من مجموعة المسارات $\propto$ التي يقطع المنحنى C عند النقطة p بزاويــة $\propto$ انظر الشكل -1-



شكل -1-

$\varphi =$ زاوية ميل مماس المنحنى C $\qquad$ $\psi =$ زاوية ميل مماس المنحنى T

نلاحظ من الشكل أن $\qquad \propto = \psi - \varphi$

ومنه $\qquad \varphi = \psi - \propto$

وبالتالي $\qquad \tan\varphi = \tan(\psi - \propto)$

إذن $\qquad \tan\varphi = \dfrac{\tan\psi - \tan\propto}{1 + \tan\psi \tan\propto}$

ولكن :

$$y'_T = \tan\psi \quad , \quad y'_c = \tan\varphi \quad , \quad \tan\propto = k \qquad \text{(ii)}$$

وعند النقطة p يكون :

$$y_c = y_T \quad , \quad x_c = x_T \qquad \text{(iii)}$$

ومنـــه

$$y'_c = \frac{y'_T - k}{1 + y'_T k} \qquad \text{(iv)}$$

وبالتعويض عن y'_c , y_c , x_c في (i) من (ii) ؛ (iii) ؛ (iv) نجد أن :

$$F(x_T \ , \ y_T \ , \ \frac{y'_T - k}{1 + ky'}) = o \qquad \text{(v)}$$

وهذه العلاقة الأخيرة صحيحة لأي نقطة عامة P تقع علـــى المنحنـــى T وبإهمـــال الدليل السفلي T تكون المعادلة التفاضلية لطائفة المسارات $\propto$ هي :

$$F(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}) = o \qquad \text{(vi)}$$

حيث $k = \tan \propto$ وهي تقطع طائفة المنحنيات (1) بزاوية $\propto$.

ii - المسارات المتعامدة :

في حالة التقاطع على الشكل المتعامد تكون $\propto = \pi/2$ أي أن $k = \infty$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لطائفة المسارات المتعامدة هي :

$$F(x, y, \frac{y'/k - 1}{\frac{1}{k} + y'}) = o$$

أو

$$F(x,y,-\frac{1}{y'})=o \qquad \text{(vii)}$$

iii – طائفة المسارات $\pi/_4$ **التي تقطع المنحنيات** $y=(x-A)^2$

أولاً : نوجد المعادلة التفاضلية لطائفة المنحنيات المكافئة بحذف البارامتر A بين y', y حيث :

$$y' = 2(x-A) \Rightarrow x-A = y'/_2$$

إذن

$$y = (\frac{y'}{2})^2 \Rightarrow y' = \pm 2\sqrt{y}$$

وحيث أن الأمر يتعلق بأجزاء المنحنيات المكافئة التي تقع في الربع الأول حيث يكون الميل موجبا فان :

$$y' = 2\sqrt{y} \qquad \text{(viii)}$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لطائفة القطع المكافئة (viii) وعليـــه تكـــون المعادلـــة التفاضلية لطائفة المنحنيات التي تقطع القطع المكافئة بزاوية $\frac{\bar{\Lambda}}{4}$ هي :

$$\frac{y' - \tan \lambda/_4}{1 + y' \tan \lambda/_4} = 2\sqrt{y}$$

$$\frac{y'-1}{1+y^1} = 2\sqrt{y} \Rightarrow y^1 = \frac{1+2\sqrt{y}}{1-2\sqrt{y}} \qquad \text{(ix)}$$

إذن

$$\int \frac{1-2\sqrt{y}}{1+2\sqrt{y}}\,dy = \int dx = x + B$$

ولإجراء التكامل في الطرف الأيسر نستخدم التعويض :

$$\sqrt{y} = t \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dt \Rightarrow 2tdt$$

و

$$\int \frac{1-2\sqrt{y}}{1+2\sqrt{y}} dy = 2\int \frac{t-2t^2}{1+2t} dt = -2\int \frac{2t^2-1}{2t+1} dt$$

ثم بقسمة بسط موضوع التكامل علي مقامة

$$-2\int \frac{2t^2-1}{2t+1} dt = -2\int \left[t - 1 + \frac{1}{2t+1} \right] dt$$

$$= -2\left[\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\ln(2t+1) \right]$$

$$-2\int \frac{2t^2-1}{2t+1} dt = -y + 2\sqrt{y} - \ln(2\sqrt{y}+1)$$

وعلية تكون طائفة معادلات المسارات $\bar{\Lambda}/_4$ هي :

$$2\sqrt{y} - y - \ln(2\sqrt{y}+1) = x + B$$

17- طائفة الدوائر $x^2 + y^2 = cy$

مركزها $(o, \frac{C}{2})$ يقع علي محور y ونصف قطرها $\left|\frac{C}{2}\right|$ حيث C بارامتر . بحـــذف البارامتر C بين هذه المعادلة و تفاضلها :

$$2x + 2yy = cy'$$

نحصل على المعادلة التفاضلية لطائفة الدوائر على الصورة :

$$2x + 2yy' = [(x^2 + y^2)/y]y'$$

أو

$$y' = -\frac{2xy}{y^{2-x^2}}$$

وبوضع $-\frac{1}{y'}$ على y' نحصل علي المعادلات التفاضلية للمسارات المتعامدة علي الصورة :

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة يمكن حلها باستخدام التعويض :

$$y = \vartheta x \Rightarrow x\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta = \frac{x^2\vartheta - x^2}{2x(x\vartheta)} = \frac{\vartheta - 1^2}{2\vartheta}$$

$$x\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\vartheta^2 - 1}{2\vartheta} - \vartheta = -\frac{1+\vartheta^2}{2\vartheta}$$

إذن:

$$(1 + \vartheta^2) = A/x \Rightarrow y^2 + x^2 = Ax$$

وهذه المسارات المتعامدة عبارة عن طائفة من الدوائر مركزها $(A/2, 0)$ علي محور x ونصف قطرها $|A/2|$

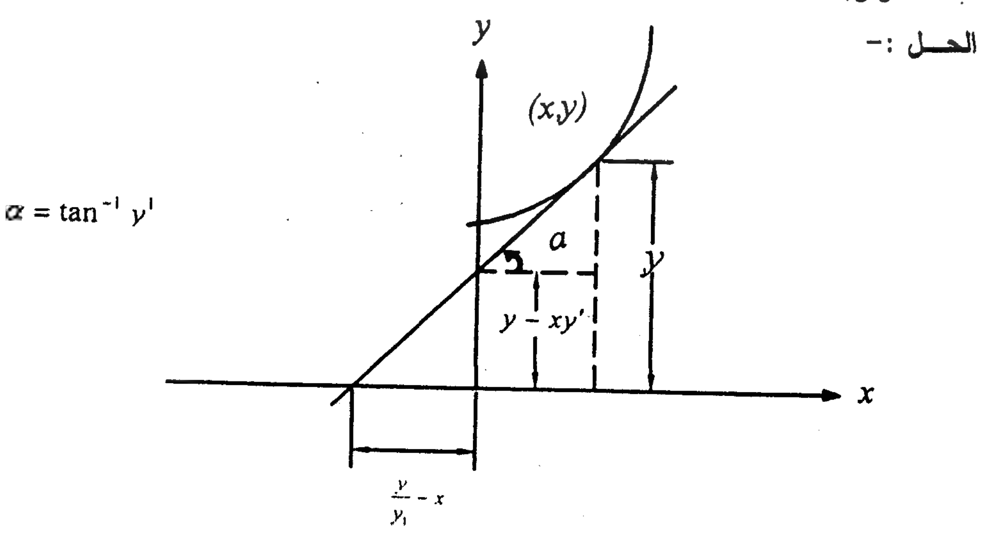
المثال الثاني: جـــد :-

i – طائفة المنحنيات التي يكون طول جزء المماس لكل عضو فيها من نقطة التمـــاس إلى محور y مساوياً للجزء المقطوع من محور y بهذا المماس .

ii– طائفة المنحنيات التي يكون طول جزء المماس لكل عضو فيها المحصـــور بيـــن محوري الإحداثيات ثابتا a .

iii– شكل العاكس الذي يعكس الضوء الصادر من نقطة ثابتة في خطـــوط مســـتقيمة متوازية .

الحـــل :-



شكل –2–

i – من الشكل (1) نري أن الجزء المقطوع بالمماس من محور y هو $y - xy'$ وطول المماس من النقطة (x, y) إلى المحور y هو $\left[x^2 + (xy')^2\right]^{1/2}$

وعليه
$$\left[x^2 + (xy')^2\right]^{1/2} = y - xy'$$

بالتربيع والاختصار نجد أن :-

$$x^2 + (xy')^2 = y^2 - 2xy\,y' + x^2 y''$$

$$x^2 + (xy')^2 = y^2 - 2xy\,y' + x^2 y'^{\prime}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

ونلاحظ أن هذه المعادلة أنها متجانسة من الدرجة صفر حلها كما في المثال السابق

$$y^2 + x^2 = Ax \qquad \text{(i)}$$

ii- من الشكل -2- نلاحظ أن طول المماس المحصور بيـــن محـــوري الإحداثيـــات يساوي

$$\left[\left(\frac{y}{y'} - x^2 \right)^2 + (y - xy')^2 \right]^{1/2}$$

وعليه

$$\left(\frac{y}{y'} - x \right)^2 + (y - xy')^2 = a^2$$

حيث a ثابت موجب بالترتيب والاختصار نحصل علي :-

$$\frac{1}{y'^2}(y - xy')^2 + (y - xy')^2 = a^2$$

أو

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

وهي من الصورة :-

$$y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad (ii)$$

حيث $p = y'$

وهذه على صورة معادلة كليرو .وبالتالي حلها العام هو :-

$$y = Ax \pm \frac{aA}{\sqrt{1 + A^2}}$$

حيث A ثابت اختياري وهـــذه طائفـــة مـــن المســـتقيمات ميلـــها A وتقطع الجـــزء $\pm \frac{\alpha A}{\sqrt{1+A^2}}$ من محور y .

وهناك حل متفرد يأتي من الحالة الثانية لمعادلة كليرو حيث :

$$x \pm \frac{d}{dp}\left[\frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right] = 0$$

$$x = \pm \frac{-a}{\left(1 + p^2\right)^{3/2}}$$

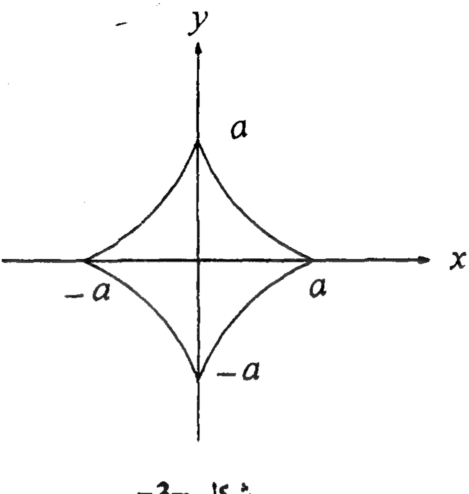
وبالتعويض عن x في (i) نجد أن :

$$y = \pm \frac{ap^3}{\left(1 + p^2\right)^{3/2}}$$

والمعادلتان الأخيرتان هما الحل المتفرد البارامتري وبحذف البـــارامتر (P) بينـــهما نحصل علي :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \qquad ,(iii)$$

وهـــذه هي الصورة الكرتيزية للحل المتفرد وهو عبارة عن منحنـــى دويـــري تحتي (hypocycloid) يغلف طائفة المستقيمات كما هو موضح في الشكل التالي :-

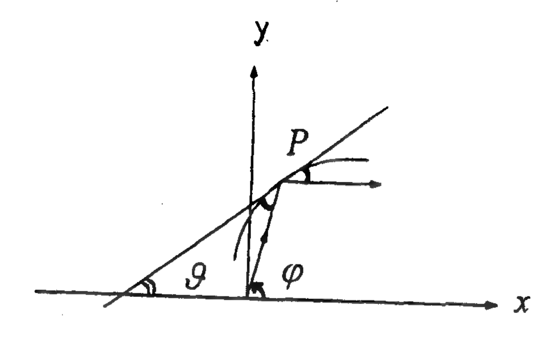


شكل -3-

iii- لتكن النقطة الثابتة (منبع الأشعة الضوئية) كنقطة أصل نفـرض أن الأشـعة المنعكسة تكون في اتجاه موازي لمحور x .

ولتكن P نقطة عامة علي السطح الدوراني العكس الذي يقطع مستوي الإحداثيـات xy في المنحني الذي معادلته $y = f(x)$

ولدينا زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس $y' = \tan \vartheta$



شكل -4-

إذن نستنتج من هندسية الشكل ما يلي :-

$$\varphi = 2\vartheta \Rightarrow \tan \varphi = \frac{2 \tan \vartheta}{1 - \tan^2 \vartheta}$$

$$\therefore \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \text{ and } \tan\vartheta = y'$$

$$\therefore \qquad \frac{y}{x} = \frac{2p}{1-p^2} \quad : \quad p = y'$$

$$\text{(a)} \qquad 2x = y\left(\frac{1-p^2}{p}\right)$$

وهذه معادلة تفاضلية تحل في x بالمفاضلة بالنسبة إلى y وملاحظة أن :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$$

نجد أن

$$2\frac{dx}{dy} = \frac{1-p^2}{p} - y.\frac{1+p^2}{p^2}.\frac{dp}{dy} = \frac{2}{p}$$

وبالاختصار نحصل علي :-

$$\text{(b)} \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow p = \frac{A}{y}$$

وبحذف (p) بين (a و b) نحصل على الحل الكرتيزي :

$$2x = y\frac{1-(A/y)^2}{A/y} = \frac{1}{A}\left(y^2 - A^2\right)$$

إذن

$$y^2 = 2Ax + A^2$$

وهذه معادلة طائفة من القطع المكافئة بؤرتها نقطة الأصل وبالتالي فالسطح العـــاكس هو أحد أعضاء طائفة السطوح المكافئة الدورانية ..

$$y^2 + z^2 = 2Ax + A^2$$

حيث محور الدوران هو المحور x .

VI.2 – تطبيقــات فيزيائيـــة :-

المثال الثالث :-

بفرض أن عدد سكان بلد في وقت ما يتزايد بمعدل يتناسب وعـــدد الســكان أنفسهم عند هذا الوقت فان كان عدد سكان ليبيا عام 1950 هو 2 مليون ثم تضـــاعف عدد السكان في عام 1990 فما هو عدد السكان عام 2000م .

الحــل :

نفرض أن عدد سكان ليبيا هو N مليون عند زمن t وحيث وحدة الزمن هي الســـنة ومقياسا بدء من عام 1950 م وعليه يكون :-

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

حيث k ثابت التناسب وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى حلها من الشكل :-

$$N(E) = Ae^{kt}$$

وبما أن : $N = 2$ عند $A = 2 \Leftarrow t = 0$

$$\therefore \quad N(t) = 2e^{kt}$$

وفي عام 1990م أي عند $t = 40$ تضاعف العدد فاصبح $N = 4$

$$\therefore N = 4 = 2e^{k(40)} \Rightarrow e^{40k} = 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{40} = 0.0173$$

وفي عام 2000م يكون $t = 50$ وبالتالي :

$$N = 2e^{k(50)} = x.e^{50\times0.0173} = 2.e^{0.865} = 4.75$$ مليون

ملاحظة :-

افترضنا هنا أن عدد السكان $N(t)$ دالة مستمرة في الزمن ولكن في الواقع $\bar{N}(t)$ هي دالة متقطعة (Discrete function) لا تأخذ إلا قيماً صحيحة ومع ذلك فالمعادلة التفاضلية تعتبر تقريبا جيدا لمثل هذه المسائل .

المثال الرابع :

حوض يحتوي علي 100 لتر من الماء يتدفق محلول ملحي يحتوي 2 كجم من الملح لكل لتر إلى الحوض بمعدل 3 لترات في كل دقيقة بينما يتدفق الخليط بعد تقليبه جيدا إلى الخارج بنفس المعدل .

I – ما هي كمية الملح الموجودة في الحوض عند أي زمن ؟

II- متى يحتوي الحوض على 100 كجم من الملح ؟

III- عِدْ I إذا كان معدل تدفق الخليط للخارج :

أ- 2ℓ في الدقيقة ؛ ب- 4ℓ في الدقيقة

الحل :

لتكن Q = كمية الملح (بكغم) الموجودة في الحوض عند أي زمن t (دقيقة)

عند $t = 0$ حجم الحوض $V_o = 100\ \ell$ (كان الحوض يحتوي علي الماء)

معدل تدفق المحلول الملحي إلى الحوض $fi = 3\ell / \min$

معدل تدفق الخليط خارج الحوض $f_o = 3\ell / \min$

تركيز الملح في المحلول الداخل إلى الحوض $f_i = 2kg / \ell$

حجم المحلول في الحوض بعد زمن t هو : $V = V_\circ + (f_i - f_\circ)t$

ويكون تركيز الملح في المحلول عند هذا الزمن هو :

$$\frac{Q}{V}=\frac{Q}{V_o+(f_i-f_o)t}\,kg/\ell$$

ويكون معدل تدفق الملح إلى خارج الحوض :

$$f_o\frac{Q}{V}=\frac{f_oQ}{V_o+(f_i-f_o)t}\,kg\min$$

معدل تزايد كمية الملح في الحوض $\frac{dQ}{dt}$ عند الزمن t هو :-

معدل خروج الملح − معدل دخول الملح = $\frac{dQ}{dt}=F_if_i(kg/\min)-f_\circ\frac{Q}{V}$

$$\frac{dQ}{dt}=F_if_i-\frac{f_oQ}{V_o+(f_i-f_o)t}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .

I- بالتعويض بالمعطيات نجد أن :- $\frac{dQ}{dt}=6-\frac{3}{100}Q$

أو $\frac{dQ}{dt}+\frac{3}{100}Q=6$

وهي معادلة تفاضلية خطية .

عامل التكميل لهذه المعادلة هو :- $\rho=e^{\int\frac{3}{100}dt}=e^{3t/100}$

وعليه يكون الحل من الشكـــــل :

$$Q=e^{-3t/100}\left[A+\int 6e^{3t/100}dt\right]=e^{-3t/100}\left[A+200e^{3t/100}\right]$$

$$Q = 200 + Ae^{-0.03t}$$

وبما أن :- $Q = 0$ عند $t = 0 \Leftarrow A = -200$

و بالتالي يكون :- $Q = 200\left[1 - e^{-0.03t}\right]$

II- لحساب الزمن الذي عنده يصبح بالحوض $100kg$ من الملح نعوض في المعادلة الأخيرة

$$100 = 200\left[1 - e^{-0.03t}\right] \Rightarrow e^{-0.03t} = 0.5$$

$$\therefore t = -\frac{1}{0.03}\ln 0.5 = 23.105 \text{ min}$$

أي بعد 23.100 دقيقة تقريباً :

III- أ) في حالة كون $f_\circ = 2\ell/\min$ فان المعادلة تكون من الشكل :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{100+t}Q = 6$$

$$\rho = e^{\int \frac{2}{100+t}dt} = e^{2\ln(100+t)}$$

وهذه معادلة خطية عاملها التكميلي هو :-

$$\therefore \rho = (100+t)^2$$

$$Q = \frac{1}{(100+t)^2}\left[A + \int 6(100+t)^2\,dt\right] = \frac{1}{(100+t)^2}\left[A + 2(100+t)^3\right]$$

بما أن $Q = 0$ عند $t = 0 \Leftarrow A = 2\times10^6$ وبالتالي :-

$$Q = 2(100+t) - \frac{2\times10^6}{(100+t)^2}$$

III- ب) في حالة $f_\circ = 4L/\min$ يكون لدينا :-

$$\frac{dQ}{dt} = 6 - \frac{4Q}{100-t}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{4Q}{100-t} = 6$$

$$\therefore \rho = e^{\int\frac{4}{100-t}dt} = e^{-4\ln(100-t)} = \frac{1}{(100-t)^4}$$

$$Q = (100-t)^4\left[A + \int\frac{6}{(100-t)^4}dt\right] = \left[\frac{2}{(100-t)^3} + A\right](100-t)^4$$

وبما أن $Q = 0$ عند $t = 0$ فان $A = -2\times10^{-6}$

$$\therefore Q = 2(100-t) - 2\times10^{-6}(100-t)^4$$

وبما أن :- $Q > 0$ فان $t \le 100\min$

المثال الخامس :-

ما هي اقل سرعة يطلق بها جسم عموديا علي سطح الأرض بحيث يتمكن من الهروب من الجاذبية الأرضية ؟ نهمل مقاومة الهواء وتأثير جاذبية أية أجرام أخرى خلاف الأرض التي نعتبرها كرة نصف قطره $R = 6375kg$ وتسارع جاذبية الأرض عند سطحها $g = 9.81m/s^2$

الحل :-

لتكن r المسافة بين الجسم ومركز الكرة الأرضية .

طبقا لقانون الجذب العام لنيوتن فان قوة جذب الأرض للجسم نجد:-

$$a = \frac{dV}{dt} = -\frac{k}{r^2}, k > 0$$

حيث r هو موضع الجسم V سرعته k ثابت موجب أخذت الإشارة سالبة لكـــون r متجهة إلى مركز الكرة الأرضية .

عند $r = R$ تكون $a = -g \Leftarrow k = gR^2$

$$\therefore r = \frac{dV}{dt} = \frac{-gR^2}{r^2}$$

ومنه

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \mathbf{V}\frac{dV}{dr} = -\frac{gR}{r^2}$$

وبفصل المتغيرات و المكاملة :-

$$\frac{1}{2}V^2 = \frac{gR^2}{R} + A$$

وبفرض أن سرعة إطلاق الجسم من عند سطح الأرض $(r = R)$هي $\mathbf{v}_\circ$ ينتج :-

$$\frac{1}{2}V_\circ^2 = \frac{gR^2}{R} + A \Rightarrow A = \frac{1}{2}V_\circ^2 - gR$$

وبالتعويض عن A نحصل علي :-

$$V^2 = \frac{2gR^2}{r} + V_\circ^2 - 2gR$$

وحتى يفلت الجسم من الجاذبية الأرضية فانه يجب أن تنعدم V عند $r = \infty$
وذلك يستوجب أن تكون :-

$$V_0^2 = 2gR \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gR}$$

وتسمي اقل سرعة هذه بسرعة الانفلات : $v_\circ = 11.1838\, km/s$

المثال السادس :-

يهبط جندي مظلات بسرعة قدرها $60km/s$ لحظة انفتاح المظلة فإذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع سرعة الهبوط بحيث كانت مقاومة الهواء لوحدة الكتل عند وحدة السرع هي $0.392N/kgm^2$ فما هي سرعة الهبوط بعد نصف ثانية ؟ ما هي سرعة الهبوط النهائية ؟

اعتبر $g = 9.8m/s^2$

الحل :-

لتكن $m(kg)$ كتلة الجندي والمظلة معا . بتطبيق قانون نيوتن للحركة والذي ينص علي أن مجموع القوي المؤثرة في الجسم ما يساوي حاصل ضرب الكتلة في العجلة ومنه :

$$m\gamma = \frac{d\vartheta}{dt} = mg - k\vartheta^2$$

حيث ϑ هي سرعة هبوط الجندي و g تسارع الجاذبية الأرضية و k ثابت تناسب (حيث $k\vartheta$ هو مقاومة الهواء) .

ويمكن كتابة المعادلة السابقة علي الشكل التالي :-

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta^2 - \dfrac{mg}{R}} = -\frac{k}{m}dt$$

وبوضع $b=k/m, a^2=mg/k$

$$\therefore \frac{d\vartheta}{\vartheta^2 - a^2} = -bdt$$

و بالمكاملة نجد :-

$$\int\frac{d\vartheta}{\vartheta^2 - a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{\vartheta}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{\vartheta - a}{\vartheta + a} = -bt + A$$

بناء علي المعطيات حيث ان عند $t=0$ تكون $\vartheta = \vartheta_0 = 60m/s$

$$\therefore \frac{1}{2a}\ln\frac{\vartheta_0 - a}{\vartheta_0 + a} = A$$

$$\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{\vartheta - a}{\vartheta + a}\right)\left(\frac{\vartheta_0 + a}{\vartheta_0 - a}\right) = -bt$$

أو

$$\frac{\vartheta - a}{\vartheta + a} = \frac{\vartheta_0 - a}{\vartheta_0 + a}e^{-2abt}$$

وبما أن مقاومة الهواء هي $k\vartheta^2$ إذن مقاومة الهواء لواحدة الكتل عند وحدة السرع هي k/m

$$\therefore \frac{k}{m} = 0.392 = b$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.392}} = 5$$

و $$ab = 5 \times 0.392 = 1.96 \quad , \quad \vartheta_0 = 60m/s$$

وبالتعويض نحصل علي ما يلي :-

$$\frac{\vartheta - 5}{\vartheta + 5} = \frac{55}{65} e^{-3.92t}$$

ومنها نجد أن :-

$$\vartheta = 5 \frac{13 + 11e^{-3.92t}}{13 - 11e^{-3.92t}}$$

وتكون سرعة الهبوط بعد $\frac{1}{2}$ ثانية هي $\vartheta = 5\frac{13 + 11e^{-1.96}}{13 - 11e^{-1.96}} = 6.3536m/s$

ولزمن يتجاوز الثانية تؤول الدالة الآسية $e^{-3.92t}$ من الصفر وبالتالي تقترب السرعة من القيمة النهائية .

$$\vartheta_f = a = 5m/s$$

<u>المثال السابع</u> :-

وضع جسم ما درجة حرارته مجهولة في ثلاجة درجة حرارتها ثابتة وتساوي $20\overset{o}{C}$ ولوحظ إن درجة حرارة الجسم أصبحت $+10\overset{o}{C}$ بعد نصف ساعة $-10\overset{o}{C}$ بعد ساعة . فما هي درجة الحرارة الابتدائية للجسم عند وضعه في الثلاجة ؟ متى تصل درجة حرارة الجسم إلي $-19\overset{o}{C}$.

الحل :-

لتكن T درجة حرارة الجسم في الزمن $t, T_s = -20°$ درجـــة حـــرارة الثلاجة بناء علي قانون نيوتن للتبريد أن معدل تغير درجة حرارة جسم بالنسبة للزمـــن متناسب مع الفرق بين درجة حرارته T ودرجة حرارة الوسط المحيط T_s

$$\therefore \frac{dT}{dt} = -k(T - T_S)$$

حيث k ثابت تناسب موجب يعتمد علي طبيعة الجسم والوسط المحيط ويمكن كتابـــة المعادلات السابقة علي الشكل التالي:-

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_S$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي e^{kt} وعليه :-

$$T = e^{-kt}\left[A + \int kT_S e^{kt} dt\right] = e^{-kt}\left[A + kT_S e^{kt}\right]$$

او

$$\therefore T = Ae^{-kt} + T_S$$

وبفرض ان درجة حرارة الجسم هي T_0 عند $t = 0$

$$\therefore T_0 = A + T_S \Rightarrow A = T_0 - T_S$$

وبالتعويض في الحل العام نحصل علي :-

بما أن عند

$t = 305$ تكون $10 = (T_0 - 20)e^{-30k} - 20 \Leftarrow T = +10°C$

أو $30 = (T_0 + 20)e^{-30k}$

كذلك عند $t = 60S$ تكون $T = 10°c \Leftarrow -10 = (T_0 + 20)e^{-60k} - 20$

أو $10 = (T_0 + 20)e^{-6k}$

بقسمة المعادلتين السابقتين نحصل علي :-

$$3 = e^{30k} \Rightarrow k = \frac{\ln 3}{30} = 0.0366$$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين السابقتين نجد أن :-

$$30 = (T_0 + 20)\frac{1}{3} \Rightarrow T_0 = 70^0 C$$

أي ان درجة حرارة الجسم الابتدائية هي :- $T_0 = 70^0 C$

وتصبح المعادلة من الشكل : $T(t) = 90e^{-0.0366t} - 20$

وعندما تصبح $T = -19°c$ يكون $-19 = 90e^{-0.0366t} - 20$

$$e^{-0.0366t} = 1/90 \quad \Rightarrow \quad t = 122.96\text{S}$$

أي أن درجة حرارة الجسم تصل إلى $-19°c$ بعد حوالي 123 ثانية

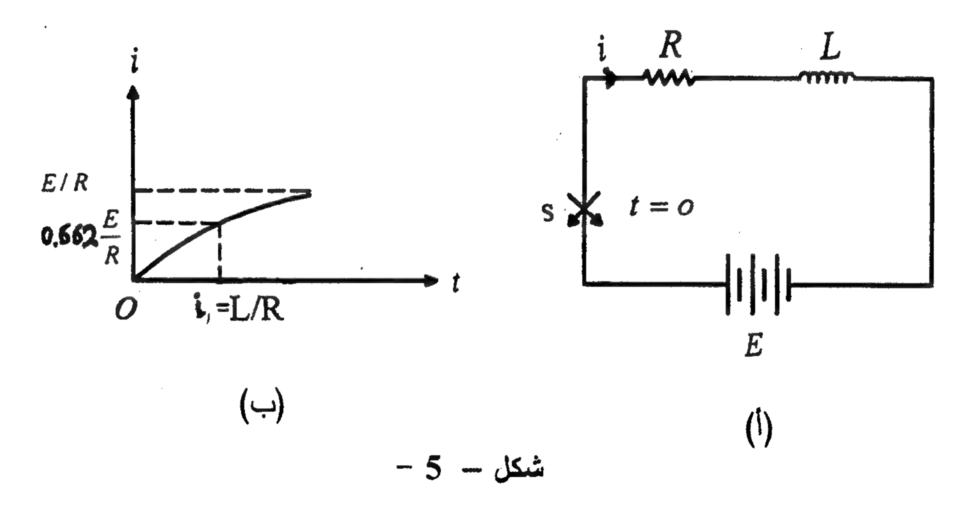
<u>المثال الثامن</u> :-

دائرة توال مكونة من مقاومة$R(\Omega)$ وملف $L(H)$, وبطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E(V)$ الشكل (أ) : ظل المفتاح S مفتوحا لمدة طويلة ثم قفل فجأة عنده $t = 0$ جد شدة التيار المار في الدائرة عند أي لحظة $t > 0$ علق على النتيجة .

إذا كان :- $E = 20v, L = 10mH, R = 10\Omega$ جد شدة التيار عند أي اللحظات :

$$t = 10\ ms \quad ، \quad t = 1ms$$

الحل :-



شكل – 5 -

ليكن i شدة التيار عند الخطة t المارة في الدائرة الكهربائية

بتطبيق قانون kirchhoff على هذه الدائرة نحصل على :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

جهد عبر الملف   جهد عبر المقاومة   القوة الدافعة الكهربائية

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي هــو $e^{\frac{R}{L}t}$ وبالتالي :

$$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left[A + \int \frac{E}{L}.e^{\frac{R}{L}t}dt\right] = e^{-\frac{R}{L}t}\left[A + \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right]$$

أو $$i(t)=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

لدينا عند الخطة $i = 0, t = 0$ وعليه :

$$o=\frac{E}{R}+A \Rightarrow A=-\frac{E}{R}$$

و $$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

وهذه شدة التيار في الدائرة عند أي لحظة $t > o$ انظر الشكل (ب)

<u>التعليق</u> :-

نلاحظ من عبارة العمل العام أن التيار الكهربائي المار في الدائرة هو مجموع حدين إحداهما هو الحد $Ae^{-\frac{R}{L}t}$ وهذا الحد يؤول إلى الصفر نظريا حينما $t \to \infty$ ولكن عمليا يؤول إلى الصفر بعد زمن يساوي عدة مرات من الزمن L/R والذي يسمى الثابت الزمني للدالة الآسية $\tau=\frac{L}{R}$ sec ويسمى هذا الحد بالحد العابر أو غير المستقر.

كلما كانت $R > L$ كلما دام الحد العابر الزمن أطول .

أما الحد الأخر فهو E/R وهو الحد الذي يدوم بعد تلاشي الحد العابر ولهذا السبب يسمى بالحد المستقر وهو التيار الذي يمر لو أنعدم الحث في الدائرة أي أن عمل الحد العابر هو سد الثغرة ما بين أحوال البداية وأحوال الاستقرار .

وبوضع $t = \tau = \frac{L}{R}$ في المعادلة السابقة لوجدنا أن شدة التيار تصبح:-

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0.632\frac{E}{R}$$

أي أن التيار ينمو من الصفر إلى 63.2% من قيمته النهائية (المستقرة) بعد زمن يساوي الثابت الزمني للدائرة .

وبعد زمن $t = 5t$ يصبح التيار :

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-5}\right) = 0.993\frac{E}{R} \approx \frac{E}{R}$$

أي أن التيار يصل تقريبا لقيمته المستمرة بعد فترة تساوي خمس مرات من الثابت الزمني للدائرة .

بالتعويض عن :

$$E = 10\,V\,,\,L = 10\,mH\;\;,\,R = 10\,\Omega$$

نجد :

$$i(t) = 1 - e^{-10^{3}t}$$

عند : $t = 1\,ms = 10^{-3}\,s\,,\,i = 1 - e^{-1} = 0.632\;\;A$

ويلاحظ أن الثابت الزمني في هذه الحالة : $\tau = \frac{L}{R} = 10^{-3}\,s$

عند : $t = 10\,ms = 10^{-2}\,s\,,\,i = 1 - e^{-10} = 0.999 \approx 1.0\,A$

أي انه يمكن القول دون تجاوز أن التيار يصل لقيمته المستقرة 1A بعد زمن 10 ms وهو عشر مرات الثابت الزمني .

المثال التاسع :-

لتكن الدائرة المبينة في الشكل التالي (6) في حالة استقرار ، فـــإذا قفـــل عنـــد $t = 0$ جد :

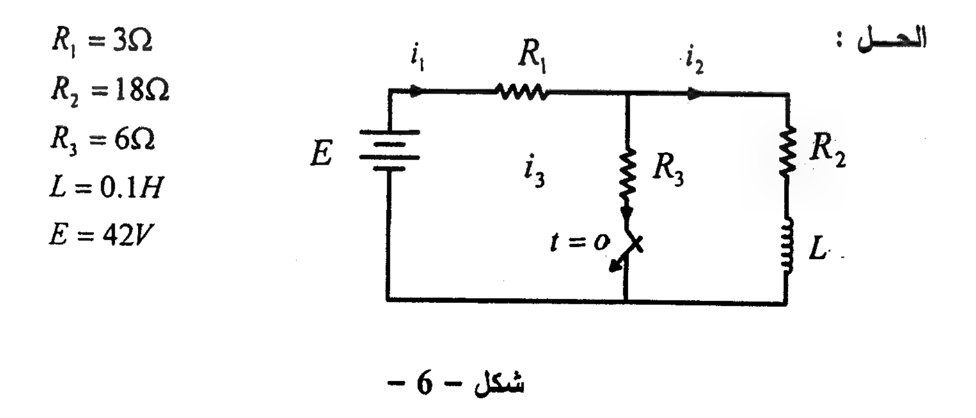
I- التيار المار في كل فرع عنده $t = 0$ (قبل قفل المفتاح مباشرة)

II- شدة التيار المار فيكل فرع عند أي لحظة $t > 0$

III- الثابت الزمني لكل تيار

IV- ارسم تغير كل تيار مع الزمن.

الحـــل :



شكل - 6 -

I- قبل قفل المفتاح $t < 0$ الدائرة في حالة استقرار هذا يعني أن الملف لا يـــؤدي دورا بسبب ثبات التيار المار فيها ، وحيث أن المفتاح مفتوح إذن :

$$i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2A, i_3 = 0$$

وتظل نفس هذه القيمة حتى قبل فتح المفتاح مباشرة $t = 0$

II- بعد قفل المفتاح مباشرة يأخذ الملفات في العمل مع منع التغير المفاجئ في تيارها i_2 وعليه يكون :

$$i_2\big|_{t=0^+} = i_2\big|_{t=0^-} = 2A$$

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد حول إطارين مقفلين نجد ما يلي :

$$i_3 = i_1 - i_2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = E \Rightarrow (R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 = E$$

$$\therefore 9i_1 - 6i_2 = 42 \Rightarrow i_1 = \frac{14 + 2i_2}{3} \qquad \textbf{(2)}$$

و

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} = E$$

$$\therefore 3i_1 + 18i_2 + 0.1\frac{di_2}{dt} = 42 \qquad \textbf{(3)}$$

بتعويض (2) في (3) نحصل على :

$$\frac{di_2}{dt} + 200i_2 = 280 \qquad \textbf{(4)}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية عاملها التكميلي e^{200t} وبالتالي :

$$i_2 = e^{-200t}\left[A + \int 280e^{-200t}dt\right] = Ae^{-200t} + 1.4$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن :- $2 = 1.4 + A \Rightarrow A = 0.6$

$$\therefore i_2(t) = 0.6e^{-200t} + 1.4 \qquad (5)$$

ثم من (2) نجد :

$$i_1(t) = 0.4e^{-200t} + 5.6 \qquad (6)$$

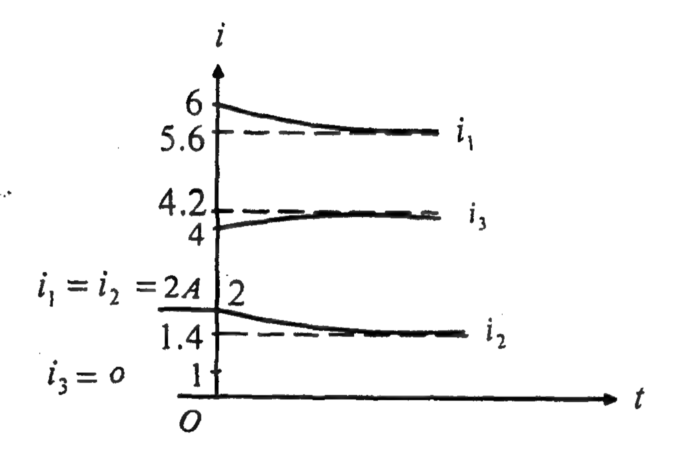
وكذلك :

$$i_3(t) = i_1 - i_2 = -0.2e^{-200t} + 4.2 \qquad (7)$$

III- واضح أن الحد العابر في كل من هذه التيارات يتناسب والدالة الأسية e^{-200t} وهذه تصبح e^{-1} حينما .

$$200\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{200} = 5ms$$

IV- يبن الشكل –7– التالي تغير التيارات مع الزمن :



شكل – 7 –

ملاحظة :

الجدير بالذكر القيم المستقرة الجديـــدة للتيـــارات أي بعـــد زمـــن كبـــير مـــن قفـــل المفتاح $t \geq 5\tau$ حيث يختفي تأثير الحث وتصبح الدائرة الكهربائيـــة عبـــارة عـــن مقاومات خالصة حيث :

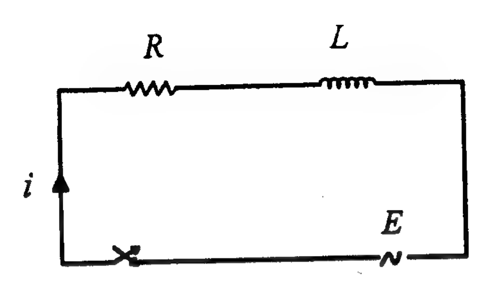
$$i_3 = 4.2A \quad , \quad i_2 = 1.4A \quad , \quad i_1 = 5.6A$$

المثال العاشر :-

لتكن لدينا الدائرة الكهربائية التالية شكل -8- حيث أن القوة الدافعة الكهربائية متناوبـــة جيبية على الصورة :

$$E(t) = E_o \cos \omega t \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

ارسم التغير الزمني للتيار على فرض أن $i(0) = 0$.



شكل -8-

الحل :

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد نحصل على :

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=E(t)=E_0\cos\omega t$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}\cos\ \omega t$$

وعامل تكميل هذه المعادلة التفاضلية الخطية هو $e^{\frac{R}{L}t}$ وبالتالي :

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left[A+\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\ \omega t\ \ dt\right]$$

نلاحظ أن لدينا بالطرف الثاني التكامل من الشكل التالي :

$$I=\int e^{at}\cos bt\,dt$$

ويمكن حسابه بالتجزئة :

$$I=\frac{1}{b}e^{at}\sin bt-\frac{a}{b}\int e^{at}\sin btdt$$

$$=\frac{1}{b}e^{at}\sin bt-\frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{at}\cos bt+\frac{a}{b}\int e^{at}\cos btdt\right]$$

$$=\frac{1}{b}e^{at}\sin bt+\frac{a}{b^2}e^{at}\cos bt-\frac{a^2}{b^2}\mathrm{I}$$

$$\therefore \frac{b^2+a^2}{b^2}\mathrm{I} = \frac{1}{b}e^{at}\sin bt + \frac{a}{b^2}e^{at}\cos bt$$

ومنه نجد أن :

$$\mathrm{I} = \int e^{at}\cos bt dt = \frac{e^{at}}{b^2+a^2}[b\sin bt + a\cos bt]$$

باستعمال هذه العلاقة نحصل على ما يلي :

$$i(t) = \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}[R\cos\omega t + L\omega\sin\omega t] + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

والتي يمكن وضعها على الصورة :

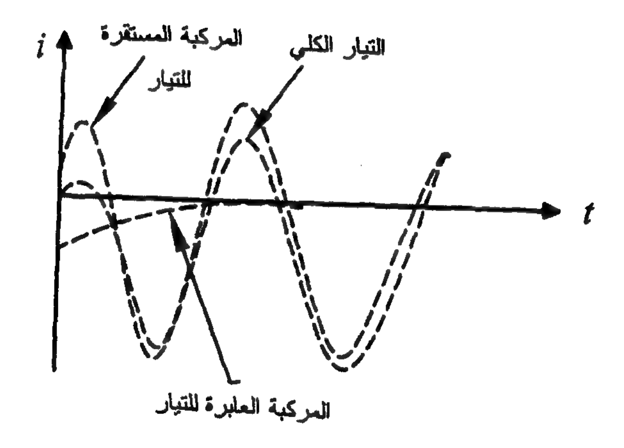
$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos(\omega t-\varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})$$

ويتعين الثابت الاختيار من الشروط الابتدائية حيث $i(0)=0$ فان :

$$A = -\frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos\varphi$$

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\left[\cos(\omega t-\varphi) - \cos\varphi e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$



شكل – 9 –

وواضح أن الحد العابر $Ae^{-\frac{R}{L}t}$ يتلاشى مع مرور الزمن ويبقى الحد المستقر للتيـــار وهو :

$$\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 ?}} \cos \omega L = \varphi$$

وهي مركبة توافقية ترددها هو نفس تردد القوة الدافعة الكهربائية وطورها (صفحتـــها) يتأخر بزاوية :–

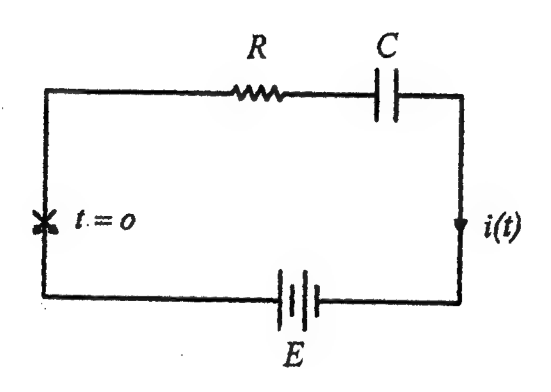
$$\varphi = ton^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

عن طور القوة الدافعة .

<u>المثال الحادي عشر :</u>

في دائرة التوالي RC المبينة في الشكل -10– التالي ، المكثف C غير مشحون مـــن الأصل ، قفل المفتاح عند $t = 0$ جد شدة التيار والجهد عبر المكثف عند أي لحظـــة

$t > 0$ ما هي المركبة العابرة والمركبة المستمرة لكل منهما ؟ أرسم تغير همـــا مـــع الزمن .



شكـــل – 10–

الحـــل :–

العلاقة بين الجهد عبر المكثف V_c والشحنة عليه Q والتيار المار فيه i هي:

$$Q = CV_c$$

و

$$i = \frac{dQ}{dt} = c\frac{dV_c}{dt}$$

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد نجد :

$$Ri + V_c = E$$

$$RC\frac{dV_c}{dt} + V_c = E$$

أو $$\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{RC}V_C=\frac{E}{RC}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية نستطيع حلها بالطريقة المعتادة :

$$V_C=E+Ae^{-t/RC}$$

وحيث أن المكثف لم يكن مشحوناً في البداية (قبل قفل المفتاح) . وحيث أنـــه يحتـــاج لوقت لتغير شحنته ، إذن $V_C=0$ بعد قف المفتاح مباشرة

$$\therefore A=-E_0$$

ويكون :

$$V_C=E_0\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

ولحساب شدة التيار هناك طريقتان :

1- لدينا: $i=\frac{dQ}{dt}=C\frac{dV_C}{dt}$ و $V_C=E_0\left(1-e^{-t/RC}\right)$

نجد أن : $$i=C\frac{dV_C}{dt}=\frac{E_0}{R}e^{-t/RC}$$

2- نحصل على المعادلة التفاضلية للتيار بمفاضلة طرفي المعادلة $Ri+V_C=E$

$$R\frac{di}{dt}+\frac{dV_C}{dt}=0$$

أو $$\frac{di}{dt}+\frac{1}{RC}i=0\Rightarrow\frac{di}{i'}=-\frac{1}{RC}dt$$

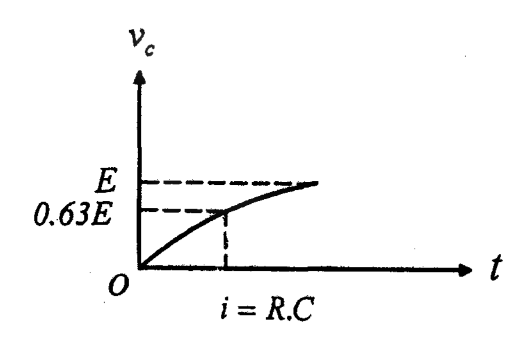
أو $$i=Be^{-t/RC}$$

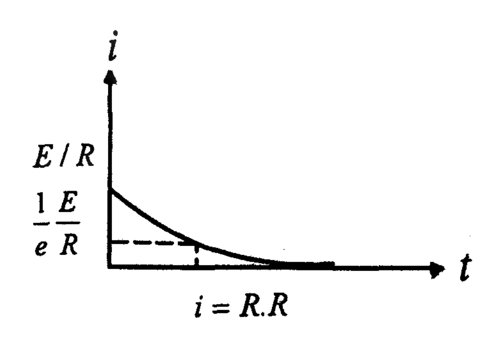
حيث B ثابت اختياري يتعين من الشروط الابتدائية ، عند قفل المفتاح مباشـــرة يظـل جهد المكثف صفر لحظيا وبالتالي تظهر القوة الدافعة الكهربائية E كلها عبر المقاومـة فيمر تيار E/R أي أن :

$$i(0^+) = E/R \Rightarrow B = E/R$$

وعليه

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-E/RC}$$





شكل -11-

بالنسبة للجهد : المركبة العابرة هي $-Ee^{-1/RC}$

تتلاشى مع مرور الزمن بثابت زمني قدرة $\tau = RC$

والمركبة المستقرة E

بالنسبة للتيار : فهو يتكون من مركبة عابرة فقط $\frac{E}{R} e^{-1/RC}$

تتلاشى مع مرور الزمن ويتلاشى الجهد عبر المقاومة .

تمـــــــارين

I- أوجد ما يلي:

1. معادلة المنحنى الذي مماسه عند نقطة ما (x, y) يقطع جزءاً $2xy^2$ من محور y .

2. معادلة المنحنى الذي عموده عند نقطة ما (x, y) يمر بنقطة الأصل .

3. معادلة المنحنى الذي مماسه عند نقطة ما (x, y) يمر بنقطة الأصل.

4. معادلة المنحنى الذي مماسه عند نقطة ما يصنع مع محـــاور الإحداثيـــات مثلثـــاً ذا مساحة ثابتة A .

5. معادلة المنحنى الذي يتناسب تحت له عند نقطة ما (x, y)) مع مربع الإحداثي x .

6. معادلة المنحنى الذي يكون ميل المماس عند نقطة ما عليه نصف ميل المستقيم الـذي يصل هذه النقطة بنقطة الأصل.

7. معادلة المنحنى الذي يكون ميل المماس عند نقطة ما مقلوب ميـــل المســـتقيم الـذي يصل هذه النقطة بنقطة الأصل .

8. معادلة المنحنى الذي يكون طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المماس لـــهذا المنحنى عند النقطة (x, y) مساوياً للإحداثي x .

9. معادلة المنحنى الذي يكون تحت المماس القطبي له مساوياً تحت العمودي القطبي.

10. معادلة المنحنى الذي تكون فيه الزاوية بين نصف القطر المتجه والممـــاس مســـاوياً لنصف الزاوية القطبية.

II- معدل تزايد البكتيريا يتناسب والعدد اللحظي للبكتيريا فإذا تضاعف العدد الأصلي للبكتيريا في ساعتين ، فبعد أي زمن يصل العدد إلى ثلاثة أمثال.

III- مادة مشعة تتحلل بمعدل يتناسب والكمية اللحظية الموجودة منها فإذا كانت الكمية الأصلية الموجودة من هذه المادة هي 100 مليغرام ولوحظ أن المادة فقدت 15 % من قيمتها الأصلية بعد 3 ساعات.

جد تغيير الكمية المادة الموجودة عند أي لحظة ؟ ما هي كمية المادة الموجودة بعد 6 ساعات ؟ يسمى زمن الحياة بالزمن اللازم لتفقد المادة 50 % من قيمتها الأصلية جد هذا الزمن ؟

IV- ينص قانون لامبرت (Lambert) للامتصاص على ان امتصاص الضوء في طبقة شفافة متصاغرة عموديا على اتجاه انتشار الضوء يتناسب وسمك هذه الطبقة من جهة وكمية الضوء الساقط على الطبقة من جهة أخرى . جد شدة الضوء داخل جسم سميك على عمق x من سطح السقوط .

V- سقط جسم كتلته 10 كجم من السكون في وسط مقاومته تتناسب مع مربع السرعة أذا كانت السرعة النهائية للجسم هي 50 م/ث فما هي سرعته بعد ثانيتين من لحظة السقوط ؟ وما هو الزمن الذي بعده تصبح السرعة 30م/ث؟

VI- يقف شاب عند الركن A من حمام سباحة مستطيل ABCD ممسكا بيده خيط مشدود طوله 10م مربوط بطرفه الآخر قارب (دون محرك) عند الركن B فإذا بدأ الشاب في التحرك على الجانب AD متجها صوب الركن D ومبقيا على الخيط مشدوداً دائماً .

جد معادلة مسار القارب وعين موضع كل الشاب والقارب عند ما يكون على بعد 6م من الجانب AC.

VII- أوجد التيار عند لحظة $t > 0$ في دائـــــرة RL قوتـــها الدافعـــة الكهربائيـــة E =10cos50t(V) ومقاومتها $R = 10\,\Omega$ ومحاثتها R = 10 H وتيارها الابتدائي يساوي صفراً .

VIII- دائرة RC قوتها الدافعة الكهربائية $E = 10\sin 100\,\pi t$ ومقاومتـــــها 15 اوم وسعتها C=1 mF والشحنة الابتدائية على المكثـــــف قدرهـــا $0.5C$ أوجـــد المركبة العابرة والمركبة المستقرة لكل من التيار وجهد المكثف .

الفصل السابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

Second order linear Differential Equations

الفصل السابع

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

Second order linear Differential Equations

1ـ تعاريف ونظريات — Definitions and theorems

- المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية هي معادلة من الصورة :

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

وهي غالباً صعبة الحل ومعقدة الدراسة وسندرس في هذا الفصل المعادلات التفاضلية التي تحل في y'' والتي يمكن كتابتها على الصورة :-

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

وكما سبق أن رأينا في الفصول السابقة أن الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى (أي التي تحتوي علي المشتقة الأولي) يحتوي علي ثابت اختياري واحد فقط وبما أن المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية تتضمن المشتقة الثانية أي يجب ان تكامل مرتين للحصول علي الحل العام ومن الطبيعي ان نترقب ظهور ثابتين اختياريين في الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

مثال -1-

الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :-

$$y'' = g(x)$$

يكون من الشكل :-

$$y = A + Bx + \int^{x}\left[\int^{t} g(s)dx\right]dt$$

حيث B, A ثابتان اختياريان .

ملاحظة :-

للحصول علي منحنى تكاملي واحد للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية فانه يجب معرفة شرطين إضافيين مثل قيمة التابع y وقيمة مشتقة y' عند هذه نقطة ما x_0 ويسمى هذان الشرطان بالشروط الابتدائية أو الحدية بمعنى آخر للحصول علي منحنى تكاملي للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية يجب تحديد نقطة يمر بها وميل المنحنى عند هذه النقطة .

سبق أن ذكرنا نظرية التواجد الأحادية بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وسنذكر هنا أيضا نفس النظرية ولكن بالنسبة للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

2_ نظرية التواجد والأحادية الحل

Existence and Uniqueness Theorem

إذا كانت الدوال f , $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ مستمرة ووحيدة القيمة في منطقة R مفتوحة من الفضاء الثلاثي $xy\vartheta$ و إذا كانت النقطة (x_0, y_0, y'_0) في R إذن في مجال حول x_0 فانه يوجد حل وحيد $y = \Phi(x)$ للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = f(x, y, y')$$

ويحقق هذا الحل الشرطين الابتدائيين التالين:-

$$y(x_0) = y_0 \qquad , \qquad y'(x_0) = y'_0$$

لا يعني وجود الحل، الحصول علية بسهولة في عبارة صريحة ؛ فقد نتمكن من الحصول عليه في عبارة صريحة في حالة إذا كانت f دالة بسيطة .

3- يمكن أن نفرق بين المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية من المرتبة الثانية كما هو الحال بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى . فالمعادلة التفاضلية الخطية العامة من المرتبة تكون من الشكل :

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \qquad (3)$$

حيث $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $G(x)$ دوال معلومة .

مثال 2-

أ- أهم مثال على المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية هي المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة كتلة m معلقة بقابض (زنبرك) ثابت مرونته k ومعامل الاحتكاك c :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

حيث k,c,m ثوابت معلومة و F دالة معرفة من اجل جميع قيم t .

ب - معادلة ليجندر Legendre (1784-1846) ذات الدرجة $\propto$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \propto(\propto -1)y = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية .

ج- معادلة بيسل Bessel (1784-1846) من الدرجة V :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = o$$

هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية .

4- إذا كان معامل y'' في المعادلة التفاضلية(3) يختلف عند الصفر $P(x) \neq 0$ في هذه الحالة يمكن قسمة المعادلة على $P(x)$ فنحصل علي المعادلة التفاضلية من الشكل :-

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x) \qquad (4)$$

ويمكن كتابتها على شكل المعادلة التفاضلية (2) فنحصل على الدالة f :-

$$f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + g(x)$$

بحيث : -

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = -q(x) \quad , \quad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = -p(x)$$

ونخلص إلى النظرية التالية بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية .

نظرية التواجد وأحادية الحل للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (2) :

- إذ كانت العوامل $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ دوال مستمرة في مجال مفتوح $\propto < x < B$ فانه توجد دالة واحدة وواحدة فقط $y = \Phi(x)$ تحقق المعادلة:-

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

علي كل المجال $\propto< x < B$ وتحقق أيضا الشرطين الابتدائيين :-

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0$$

عند نقطة خاصة x_0 في المجال $\propto< x < B$ -

<u>مثال -3-</u>

جد حل المعادلة التالية :-

$$y'' + y = 0$$

الذي يحقق الشرطين الابتدائيين التاليين :- $y'(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 0$

<u>الحل</u> :-

انه من السهولة التحقق من أن : $\sin x$, $\cos x$ حلول للمعادلة التفاضلية المعطاة . أما التي تحقق الشروط الابتدائية هي $y = \sin x$ إذن وفق النظرية السابقة $y = \sin x$ هو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة .

<u>مثال -4-</u>

ما هو الحل الوحيد للمعادلة التالية:-

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

حيث $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, x_0 نقطة في المجال $\propto< x < B$

<u>الحل</u>:-

بما أن $y = 0$ تحقق المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية معا إذن $y = 0$ هو الحل الوحيد

5- لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

نبحث أولاً عن حل المعادلة المتجانسة :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (5)$$

الناتجة من المعادلة (4) بوضع $g(x) = 0$.

وإذا عرفنا حل هذه المعادلة يمكن بطريقة عامة الحصول على حل المعادلة غير المتجانسة (4) .

2.VII المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية :-

Nonlinear second Order Differential Equations.

إذا لم تكن المعادلة (2) من الشكل (3) فأنها معادلة تفاضلية غير خطية ، وبرغم أن دراسة المعادلات التفاضلية غير الخطية من المرتبة الثانية صعبة إلى حد ما ، فإن هناك حالتين خاصتين يمكن فيهما اختزال المعادلة التفاضلية العامة غير الخطية من المرتبة الثانية (2) إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ويحدث هذا في حالة غياب المتغير x أو المتغير y من الدالة $f(x, y, y')$ في المعادلة(2) أي لما تكون المعادلة من الشكل :

$$y'' = f(x, y') \qquad (6)$$

أو

$$y'' = f(y, y') \qquad (7)$$

يتم إجراء التغيير $y' = \vartheta$ بحيث تحل المعادلة من المرتبة الأولى بالنسبة للمتغـــير ϑ بإحدى الطرق المفصلة في الفصول السابقة ثم بعدها تكامل عبارة ϑ بالنسبة إلـــي x للحصول على الحل العام للمعادلة الأصلية .

الحالة الأولى :-

إذا كانت المعادلة من الشكل :- $\quad y'' = f(x, y')$

بوضع $\quad \vartheta = y' \quad , \quad \vartheta' = y'' \quad$ نجـد :

$$\vartheta' = f(x, \vartheta)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ليكن حلها من الشكل :

$$\vartheta = g(x, A)$$

وبما أن :

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta = g(x, A)$$

وتكامل هذه المعادلة يعطي :- $\quad y = \int g(x, A)dx + B$

مثال -5-

حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0$$

الحـل :-

بوضع $\vartheta = y'$ تصبح المعادلة من الشكل :-

$$x^2 \vartheta' + 2x\vartheta - 1 = 0$$

أو

$$\vartheta' + \frac{2}{x}\vartheta = \frac{1}{x^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وعامل التكميل :

$$\rho = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$$

وحلها من الشكل :
$$\rho \vartheta = \int x^2 \frac{1}{x^2} dx + A = x + A$$

أي :
$$\frac{dy}{dx} = \vartheta = \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2}$$

نكامل هذه المعادلة فنحصل على :- $y = \ln x - \frac{A}{x} + B$

وهو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة :-

الحالة الثانية :-

إذا كانت المعادلة من الشكل : $y'' = f(y, y')$

بوضع $\vartheta = y'$ نجد :

$$\vartheta' = f(y, \vartheta)$$

هذه المعادلة تحتوي على y, x و ϑ وهي ليست على الصورة التفاضلية من المرتبة الأولى ، ولكن يمكن حذف المتغير x وتعويضه بالمتغير التابع y حيث :

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d\vartheta}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \vartheta \frac{d\vartheta}{dy}$$

وتصبح المعادلة الأصلية من الصورة :

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dy} = f(y, \vartheta)$$

وهذه المعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، وحلها هو عبارة عن علاقة بين y, ϑ أي $\vartheta = \vartheta(y)$ أما العلاقة بين x, y ونحصل عليها من حل المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta(y)$$

ومن ناحية أخرى يظهر ثابتان اختياريان في الناتج النهائي .

مثال -6-

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

الحل :-

بوضع $\vartheta = y'$ نجد :- $y\vartheta' + \vartheta^2 = 0$

ولكن $$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d\vartheta}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \vartheta \frac{d\vartheta}{dy}$$

إذن تصبح المعادلة من الشكل :- $$y\vartheta \frac{d\vartheta}{dy} + \vartheta^2 = 0$$

وتكتب من الشكل : $$\frac{d\vartheta}{\vartheta} + \frac{dy}{y} = 0$$

بعد المكاملة نجد : $$\ln \vartheta + \ln y = \ln A' \Rightarrow \vartheta = A'/y$$

وبما أن $$\vartheta = \frac{dy}{dx} = A'/y$$

أو

$$ydy = A'dx$$

ومنه

$$\frac{1}{2}y^2 = A'x + B'$$

إذن الحل العام للمعادلة المعطاة هو : $y^2 = Ax + B$

VII-3- المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية

Homogenous Linear Second Order Differcntial Equotions .

انه من المفيد لدراسة المعادلات التفاضلية الخطية ، في أحيان كثيرة إدخال المؤثر التفاضلي الخطي وبما أن الدوال $p(x)$, $q(x)$ دوال مستمرة على المجال المفتوح $\propto < x < B$. إذن إذا كانت y دالة قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $\propto < x < B$ فيمكن أن تعرف المؤثر الخطي بالمعادلة :-

$$L[y] = y'' + p.y' + q.y$$

ونعرف المؤثر التفاضلي بأنه ذلك المؤثر الذي إذا اثر على دالة ما $f(x)$ فان ناتج التأثير يكون المعامل التفاضلي لهذه الدالة أي مشتقتها $f'(x)$:-

$$Df(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

مما يعني انه : $D = \frac{d}{dx}$ و $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$

ومنه يمكن كتابة المؤثر الخطي L على الصورة :- $L = D^2 + pD + q$

وقيمة الدالة $L[y]$ عند النقطة x هي :-

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)$$

ويمكن كتابتها من الشكل :- $L[y]=y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)$

مثال -7-

إذا كان: , $p(x)=x^2$, $q(x)=1+x$, $y=\sin 3x$

فأن :

$$L[y]=(\sin 3x)''+x^2(\sin 3x)'+(1+x)\sin 3x$$

$$=-9\sin 3x+3x^2\cos 3x+(1+x)\sin 3x$$

ويمكن كتابة المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية على الصورة الموجزة :-

$$L[y]=g(x)$$

كما تاخذ المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية الصورة الموجزة :

$$L[y]=0$$

في هذه الفقرة سندرس المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية :-

$$L[y]=y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y=0$$

حيث أن q,p دوال مستمرة على المجال المفتوح $\alpha < x < B$

نظرية -3-

إذا كان $y=y_2(x)$ و $y=y_1(x)$ حلين للمعادلة التفاضلية :

$$L[y]=0$$

فان التوافقية الخطية $y=Ay_1(x)+By_2(x)$ هي أيضا حلا للمعادلـــة التفاضليـــة حيث أن B,A ثابتين اختياريان .

البرهان :-

لدينا $y = y_1(x)$ هو الحل للمعادلة التفاضلية $L[y]=0$ أي أن :-

$$L[y_1]= y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

ولدينا $y = y_2(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $L[y]=0$ أي أن :-

$$L[y_2]= y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

لنحسب $L[Ay_1 + By_2]$

$$L[Ay_1 + By_2]=(Ay_1 + By_2)'' + p(x)(Ay_1 + By_2)' + q(x)(Ay_1 + By_2)$$

$$= A\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 \right) + B(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)$$

$$= AL[y_1] + BL[y_2] = 0$$

إذن $y = Ay_1 + By_2$ هو حل للمعادلة المعطاة .

ملاحظات :-

1- إذا أخذنا في العبارة الأخيرة $B = 0$ فنلاحظ انــه إذا كــانت y_1 حــلا للمعادلــة $L[y]=0$ فان Ay_1 هو أيضا حل للمعادلة .

2- واضح من برهان النظرية -3- أن المؤثر التفاضلي L له الخاصية التالية :-

$$L[Ay_1 + By_2]= AL[y_1]+ BL[y_2]$$

كل مؤثر له هذه الخاصية يدعي (مؤثر خطي) و بــالخصوص المؤثــر التفــاضلي L هو مؤثر تفاضلي خطي من المرتبة الثانية .

3- ونخلص في النهاية إلى مبدأ يلعب دورا هاما في موضوع المعادلات التفاضليـــة الخطية الذي يعرف بمبدأ التراكب (Superposition principle):-

إذا كانت فئة الدوال $\{y_i(x)\}_{i=1.m}$ هي حلول مستقلة للمعادلة التفاضلية المتجانســة $L[y]=0$ فان أية توافقية خطية

$$\sum_{i=1}^{k} A_1 y_1(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \ldots\ldots A_k y_k(x)$$

من بين هذه الحلول هي أيضا حل المعادلة المتجانسة $L[y]=0$.

ملاحظة :-

يجب قبل البدء في تطبيق المبدأ التأكد من أن المعادلة التفاضلية خطيـــة ومتجانســة حيث أنه لا ينطبق هذا المبدأ على المعـــادلات التفاضليـــة غــير الخطيـــة أو غــير المتجانســة .

مثال -8-

تحقق بالتعويض المباشر أن $y = A\cos x + B\sin x$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + y = 0$$

الحـــل :

بالتعويض المباشر في المعادلة التفاضلية نجد :

$$y'' + y = (A\cos x + B\sin x)'' + (A\cos x + B\sin x)$$

$$= A\left[(\cos x)'' + \cos x\right] + B\left[(\sin x)'' + \sin x\right]$$

$$= A[-\cos x + \cos x] + B[-\sin x + \sin x] = 0$$

مثال -9-

تحقق من أن $y = x + 1$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + y = x + 4$

وان الدالة $\Phi(x) = 2x$ ليست حلا للمعادلة .

الحــل :

بما أن $y'' = 0$ ، $y' = 1$ ، $y = x + 1$

إذن $y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + (x + 1) = x + 4$

ولدينا $\Phi'' + 3\Phi' + \Phi = 0 + 3(2) + 2(x + 1) \neq x + 4$

هذا لا يتعارض مع النظرية -3- لان المعادلة التفاضلية غير متجانسة بالرغم مــن كونها خطية .

مثال -10-

بين أن إذا كانت y_2, y_1 حلين للمعادلة التفاضلية :

$$L[y] = y'' + y^2 = 0$$

فانه ليس من الضروري أن تكون التوافقية الخطية $Ay_1 + By_2$ حلا للمعادلة :-

الحــل :

لدينا $L[y_1] = y_1'' + y_1^2 = 0$

$$L[y_2] = y_2'' + y_2^2 = 0$$

ومنه يكون لدينا :-

$$L[Ay_1 + By_2] = (Ay_1 + By_2)'' + (Ay_1 + By_2)^2$$

$$= Ay_1'' + By_2'' + A_1^2 y_1^2 + B^2 y_2^2 + 2ABy_1 y_2$$

$$\neq AL[y_1] + Bl[y_2]$$

لان المعادلة ليست خطية .

نتيجة -1-

لقد رأينا انه إذا كان y_2, y_1 حلين للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (5)فان كل توافقية خطية $Ay_1 + By_2$ هي أيضا حل للمعادلة .

نتيجة -2-

نسمي فئة الحلول $\{y_1, y_2\}$ قاعدة الحلول للمعادلة التفاضلية الخطية (5) إذا كان كل حل للمعادلة على صورة توافقية خطية من كل قاعدة الحلول هذه . وعدد الدوال المكونة لقاعدة حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة ثابت ، وان اتخذت هذه الدوال صورا مختلفة على انه يمكن إرجاع هذه الصورة بعضها لبعض .

تعريف :-

لتكن لدينا دالتان y_2, y_1 قابلتان للاشتقاق ومعرفتان على مجال ما مفتوح نعرف محددة رونسكي أن ببساطة رونسكيان (wronskion) الدالتين y_2, y_1 بأنها المحددة :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

ورونسكيان فئة دوال هو عموما ما دالة للمتغير المطلق x وقد يكون ثابتا أو صفرا فمثلا :-

$$w\left(x, x^2, x^3\right)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

$$w\left(e^x, e^{-x}\right)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$$w(-2x, x)=\begin{vmatrix} -2x & x \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

و الآن إلى النظرية الهامة التالية :-

نظرية -4-

إذا كانت الدالتان $p(x)$, $q(x)$ مستمرتين على المجال المفتوح $\propto< x < B$

إذا كانت الدالتان y_2, y_1 حلين للمعادلة التفاضلية (5)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

على المجال $\propto< x < B$ وإذا كانت على الأقل نقطة واحدة في المجال $\propto< x < B$ حيث $w(y_1, y_2)$ لا يساوي الصفر ، إذن كل حل y للمعادلة(5) يمكن أن يوضع على الصورة :- $y = Ay_1 + By_2$

البرهان :-

الفرض : لتكن y_3, y_2, y_1 حلول المعادلة (5)

و $w(y_1, y_2)$ لا يساوي الصفر على المجال $\propto< x < B$.

المطلوب إثبات إن : $y_3 = Ay_1 + By_2$

الإثبات :

بما أن y_1, y_2, y_3 هي حلول المعادلة التفاضلية (5) إذن :-

$$y_1'' + p(x)y_2' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

$$y_3'' + p(x)y_3' + q(x)y_3 = 0$$

بضرب المعادلة الأولى في $(-y_2)$والثانية في y_1 ثم تجمـــع المعـــادلتين النـــاتجتين فنحصل على :-

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(x)[y_1 y_2' - y_2 y_1'] = 0 \qquad (a)$$

بوضع $$w_{12}(x) = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

نلاحظ أن المعادلة (a) يمكن أن تكتب على الشكل :

$$w_{12}' + p(x)w_{12} = 0 \qquad (b)$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة للفصل وحلها يكون من الشكل :

$$W_{12}(x) = C_{12} e^{-\int p(x)dx} \qquad (C)$$

وتعرف هذه العلاقة بمطابقة ابل (Abel's Identity) نسبة إلى الشاب الريـــاضي النرويجي نيلز ابل (1802-1829) ..

حيث أن الدالة الآسية $e^{-\int Pdx}$ لا تنعدم أبدا إلا إذا كـــان $\int pdx = \infty$ وهـــذا لـــن يتوفر حدوثه لان p دالة مستمرة فرضا . أذن فلن ينعدم الرونســـكيان إلا بـــانعدام الثابت الاختياري فقط وفي هذه الحالة فقط الحلان y_1, y_2 متناسبان طرديا .

وبنفس الطريقة باستعمال الثانية والثالثة معا تم الأولى والثالثة معا فنحصل على :-

$$W'_{23} + p(n)(x)_{23} = 0 \qquad (d)$$

$$W'_{13} + p(n)(x)_{13} = 0 \qquad (e)$$

وهما معادلتان تفاضليتان من المرتبة الأولى قابلتين للفصل ومنه :

$$W_{23} = C_{23} e^{-\int p(x)dx} \qquad (f)$$

$$W_{13} = C_{13} e^{-\int P(x)dx} \qquad (g)$$

حيث C_{13}, C_{23}, C_{12} ثوابت اختيارية وخاصة $C_{12} \neq 0$ لأن $W_{12} \neq 0$ فرضا .

بضرب المعادلة (f) في $(-y_1)$ والمعادلة (g) في y_2 ثم بجمع المعادلتين فنجد:

$$(y_1 y'_2 - y'_1 y_2) y_3 = [C_{13} y_2 - C_{23} y_1] e^{-\int P(x)dx}$$

باستخدام (C) وتعويضا في هذه المعادلة نجد :-

$$y_3 = -\frac{C_{23}}{C_{12}} y_1 + \frac{C_{13}}{C_{12}} y_2 = Ay_1 + By_2$$

إذن y_3 هي عبارة عن توافقية خطية من y_2, y_1 وهو المطلوب .

ملاحظة :

يبقى أن نثبت أن للمعادلة التفاضلية (5) قاعدة حلول وهذا ما نثبتــه فــي النظريــة التاليـــة :

نظرية -5-

إذ كانت الدالتان $p(x)$, $g(x)$ مستمرين على مجال ما مفتـوح $\propto < x < B$

إذن فانه توجد قاعدة حلول للمعادلة التفاضلية (5)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

على المجال $\propto < x < B$

البرهان :-

لتكن C نقطة من المجال $\propto < x < B$ وبناء على نظرية و التواجد الأحادية فانه يوجد حلان y_2, y_1 وحيدان لمسألتي القيم الحدية التاليتين على الترتيب :-

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(n)y_1 = 0 \quad , \quad y_1(c) = 1 \quad , \quad y_1'(c) = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_1 = 0 \quad , \quad y_2(c) = 0 \quad , \quad y_2'(c) = 1$$

على المجال $\propto < x < B$ وواضح أن $w(y_1, y_2) \neq 0$ عند النقطــة C أذن مــن النظرية (4) ينتج أن $\{y_1, y_2\}$ هي قاعدة حلول للمعادلة التفاضلية (5) .

vii_4. الاستقلال والارتباط الخطي :-

Linear dependance and linear Independane.

أن فكرة انه الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية هو عبــارة عــن توافقية خطية لحلين اثنين حيث رانسكيان هذين الحلين يختلف عن الصفــر مرتبطــة بصميم فكرة التبعية الخطية لدالتين .

نعتبر العلاقة الخطية التالية :

$$Af(x) + Bg(x) = 0 \qquad (8)$$

حيث $f(x)$, $g(x)$ دالتان في x معرفتنا في مجال ما $\propto < x \leq \beta$, A , B ثابتان اختياريان يراد تعينهما . واضح أن هذه العلاقة تسري بالتأكيد علـــى الحالــة $B = O, A = 0$ أما إذا وجد أن هذه العلاقة تسري على الحالة $A \neq 0$ فانـــه يمكــن القسمة على A نجد أن :-

$$f(x) = -\frac{A}{B} g(x)$$

بالمثل إذا كان $\propto$ $B \neq 0$ فبالقسمة على A نجد أن $g(x) = \frac{A}{B} \int (x)$

وفي كلتا الحالتين يكون هناك تناسب بين الدالتين $f(x)$, $g(x)$ فـــي المجــال $\propto < x < \beta$ ويقال في هذه الحالة ان هناك ارتباطا خطيا (linear Dependane) بين $f(x)$, $g(x)$ أو انهما تابعتان او مرتبطتان خطيا أي يمكن الحصـــول علـــى إحداهما بدلالة الأخرى من خلال عملية تناســـب . وبمعنـــى أخــر تكــون الدالتــان $f(x)$, $g(x)$ تابعتين خطيا على المجال المعرفتان عليه إذا وإذا فقط , أمكن إيجــاد ثابتين A,B بحيث ينعدم كلاهما وبحيث تتحقق العلاقة :

$$Af(x) + Bg(x) = 0$$

لجميع قيم x في المجال $\propto < x < \beta$

أما إذا لم تتحقق المتطابقة السابقة على المجال $\propto < x < \beta$ إلا في حالة واحدة هي انعدام B,A معا فان $f(x)$, $g(x)$ تكونـــان مســـتقلتين خطيـــا علـــى المجــال $\propto < x < \beta$ وفي هذه الحالة لا يمكن التعبير عن إحدى الدالتين بدلالة الأخرى .

مثال 11-

الدالتان $f(x) = x$, $g(x) = 5x$ تابعتان خطيا على المجال $]-\infty + \infty[$ لانـــه يمكن تكوين علاقة خطية على نمط العلاقة السابقة (8) تتحقق للقيم :

$$5f(x) - g(x) = 5(x) - (5x) = 0 \qquad : \qquad B = -1 \; , \; A = 5$$

وبطبيعة الحل فالتناسب بين $f(x)$, $g(x)$ واضح .
بينما الدالتان $f(x)=e^{x}$, $g(x)=e^{-x}$ دالتان مستقلتان خطيا لانه لا يمكن تكوين علاقة خطية بينهما على نمط العلاقة (8) دون انعدام كل من A , B

حالة عامة :

الآن نعمم هذا المفاهيم :-

دوال الفئة $\{y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ المعرفة على المجال $\alpha < x < \beta$, تكون تابعة خطيا على المجال $\alpha < x < \beta$ إذا وجدت فئة من الثوابت $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ بحيث لا تنعدم جميعها وبحيث يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i y_i(x) = 0$$

أو

$$A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \ldots.. + A_i y_i(x) + \ldots\ldots. + A_n y_n(x) = 0 \qquad (9)$$

عند أي قيمة x في المجال $\alpha < x < \beta$

مثال -12-

نلاحظ ان دوال الفئة $\{x, 2x, x^2\}$ ثابتة خطيا على المجال $]-\infty, +\infty[$ لانه توجد فئة ثوابت $\{2,-1,0\}$ لا تنعدم جميعها بحيث يكون $2(x) - 1(2x) + 0(x^2) = 0$ لجمع قيم x .

كما يقال أن دوال الفئة $\{y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ المعرفة على المجال $\alpha < x < \beta$ تكون مستقلة خطيا على هذا المجال إذا لم تكن تابعة خطيا ويستلزم ذلك إلا تتحقق (9) إلا بانعدام جميع الثوابت $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ أي أن

$$A_1 = A_2 = \ldots\ldots = A_i = \ldots.. = A_n = 0$$

مثال -13-

نلاحظ أن دوال الفئة $\{1, x, x^2\}$ مستقلة خطيا علـــى المجـــال $]-\infty, +\infty[$ لأنه لا يمكن بأي حال تكوين فئة مـــن الثوابـــت $\{A_1, A_2, A_3\}$ بحيـــث تتحقـــق المتطابقة $A_1(1) + A_2(x) + A_3(x^2) = 0$ لجميع قيم x إلا إذا انعدمت كل هذه الثوابت . ولكن يجدر ملاحظة انه إذا لم تنعدم هذه الثوابت فان هذه المتطابقـــة لا تتحقق إلا عند قيمتين على الأكثر من قيم x وليس عند جميع قيم x ، هما جـــذران المتطابقة إذا اعتبرناها معادلة من الدرجة الثانية في x . الآن نستطيع إعادة النظريـــة -4- باستعمال مفهوم الاستقلالية الخط .

نظرية -6-

إذا كانت الدالتان $q(x), p(x)$ مستمرتين على مجال ما مفتوح وإذا كـــانت الدالتان y_2, y_1 حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية التالية :

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

إذن فالرونسكيان $w(y_1, y_2)$ يختلف عن الصفر على المجال $\alpha < x < \beta$ وأن كل حل المعادلة التفاضلية يمكن أن يوضع على شكل توافقية خطية من y_2, y_1 .

البرهان :-

لإثبات هذه النظرية يجب ان نبرهن انـــه إذا كانتـــا y_2, y_1 حليـــن للمعادلـــة التفاضلية من المرتبة الثانية و همـــا مســـتقلان خطيـــا فـــي المجـــال $\alpha < x < \beta$ إذن $w(y_1, y_2)$ يختلف عن الصفر المجال $\alpha < x < \beta$.

لنفترض انه توجد نقطة x_0 من المجال $\alpha < x < \beta$ حيث $w(y_1 y_2)(x_0) = 0$ وسنثبت الآن أن هذا يؤدي إلى تعارض .

إذا كان : $w(y_1 y_2)(x) = 0$

إذن فيظام المعادلتين :-

$$A_1 y_1(x_0) + By_2(x_0) = 0$$

$$Ay_1(x_0) + By_2'(x_0) = 0$$

بالنسبة للثابتين A ,B له حل غير الحل الصفري .

باستعمال هذه القيم للثابتين A ,B, ليكن $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ إذن y هي حـــل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية ونلاحظ من المعادلتين الســـابقتين أنـــها تحقــق الشروط الابتدائية .

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0$$

وبناء على نظرية التواحد والفردية فان $y(x) = 0$ من اجل كل قيم x في المجــال $\propto < x < \beta$ انظر مثال -4-

إذن $Ay_1(x) + By_2(x) = 0$ على المجال $\propto < x < \beta$ والذي يستلزم أن y_2 , y_1 مرتبطين(تابعين) خطيا . وهذا تناقض.

معكوس النظرية هو أيضا صحيح ونعنى انه إذا كان :

$$L[y_1] = 0 \quad , \quad L[y_2] = 0$$

و $w(y_1 , y_2) \neq 0$ على المجال $\propto < x < \beta$

إذن فالدالتان $y_2 y_1$ مستقلتان خطيا على المجال $\propto < x < \beta$ ولإثبات هـــذه القضية نفرض العكس أن y_2 , y_1 مرتبطان خطيا علـــى المجـــال $\propto < x < \beta$ إذن فانه يوجد ثابتان A ,B يختلفان عند الصفر حيث :

$$Ay_1(x) + By_2(x) = 0 \quad \text{على المجال} \quad \propto < x < \beta$$

وبالتالي $Ay_1'(x) + By_2'(x) = 0$ على المجال $\propto < x < \beta$

إذن من أجل قيم A , B (A أو B) تختلف عن الصفر المحققة للمعادلتين السـابقتين فانه من اللازم ومن الواجب أيضا أن يكون $w(y_1, y_2) = 0$ من اجل كـل x وهـذا تناقض .

إذن يكون حلا المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية مسـتقلين خطيـا إذا و إذا فقـط رونسكيان الدالتين يختلف عن الصفر عند أي نقطة على المجال $\propto < x < \beta$

5.vii تخفيض المرتبة لمعادلة تفاضلية خطية :-

من أهم خواص المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية أنه إذا كـان حـل واحد للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية معلوما فانه يمكن تعين الحل الثاني المستقل خطيا وأيضا القاعدة الأساسية للحل وهذه الطريقة تسـمى بطريقـة دالمبـير DAlmbert او بطريقة تخفيظ المرتبة .

لنفرض أن y_1 حيث $y_1 \neq 0$ حل للمعادلة :-

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ولنستعمله في تخفيض مرتبة هذه المعادلة بأخذ دالة جديدة $\vartheta(x)$حيث :

$$y = \vartheta(x)y_1(x) \qquad \textbf{(10)}$$

وبالاشتقاق نجد :

$$y' = \vartheta(x)y_1'(x) + \vartheta'(x)y_1(x)$$

$$y'' = \vartheta(x)y_1''(x) + 2\vartheta'(x)y_1'(x) + \vartheta''(x)y_1(x)$$

وبالتعويض في المعادلة بعد الترتيب نجد :

$$\vartheta(x)\left[y_1'' + py_1' + qy_1\right] + \vartheta'\left[2y_1' + py_1\right] + \vartheta'' y_1 = 0$$

بما أن y_1 حل للمعادلة التفاضلية من المرتبة فالحد الأول من هذه المعادلة معدوم .
وبما أن $y_1 \neq 0$ يمكن القسمة على y_1 فنحصل على :

$$\vartheta'' + \left[p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right]\vartheta' = 0 \qquad (11)$$

لنفرض أن $z = \vartheta'$ فنجد أن المعادلة (11) يمكن أن تكتب على الشكل :

$$Z' + \left[P + 2\frac{y_1'}{y_1}\right]Z = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير التابع Z ويمكن حلـــها بفصل المتغيرات حيث :

$$\frac{dz}{z} = -\left[p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right]dx$$

بالمكاملة نجـــد :

$$\ln Z = -\int pdx - 2\ln y_1 + \ln A$$

حيث A ثابت اختياري

أو

$$\vartheta' = Z = A\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx} = AU(x)$$

بالمكاملة مرة أخرى نجـــد :

$$\vartheta(x) = \int Z dx = A \int U(x) dx + B$$

حيث :

$$U(x) = \frac{1}{y_1^{\,2}} e^{-\int p(x) dx}$$

و B ثابت اختياري ثاني .

بالتعويض في التابع الأصلي نجد :-

$$y = \vartheta(x) y = A y_1 = A y_1(x) \int U(x) dx + B y_1(x)$$

وهكذا نلاحظ أننا إذ عرفنا حلا واحدا للمعادلة الخطية من المرتبة الثانية فإننا نحتـــاج إلى عمليتي تكامل للوصول إلى الحل العام .

ونلاحظ أن الحلين :

$$y = y_1(x) \quad , \quad y = y_1(x) \int U(x) dx \qquad \textbf{(12)}$$

حلان مستقلان خطيا .

ملاحظات :-

1) انه من الممكن الحصول على الحل الثاني المستقل خطيا المعطي بالعلاقـة (12) باستعمال قاعدة ابيل (Abel) لرونسكيان لحلين مستقلين خطيا .

2) طريقة تخفيض المرتبة يمكن استعمالها أيضا في حالة المعادلة التفاضلية الخطيـة غير المتجانسة .

مثال -14-

بين أن y =x هو الحل لمعادلة ليجندر (Legender) :

$$\left(1-x^{2}\right)y''-2xy'+2y=0 \qquad -1<x<1$$

ثم جد الحل الثاني المستقل خطيا .

الحل :-

أولا إذا كان y =x فأن $y'=1 \quad , \quad y''=0$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$\left(1-x^{2}\right)0-2x+2x=0$$

إذن y =x هو حل للمعادلة .

ولإيجاد الحل الثاني نفرض $y=x\vartheta(x)$

إذن $y''=x\vartheta''+2\vartheta'$ و $y'=x\vartheta'+\vartheta$

وبالتعويض في المعادلة عن y'',y',y نجـــد :

$$\left(1-x^{2}\right)\left(x\vartheta''+2\vartheta'\right)-2x\left(x\vartheta'+\vartheta\right)+2x\vartheta=0$$

بعد الترتيب والقسمة على $x\left(1-x^{2}\right)$ نحصل على :

$$\vartheta''+\left(\frac{2}{x}-\frac{2x}{1-x^{2}}\right)\vartheta'=0$$

ونلاحظ ان معامل ϑ' غير معرف عند النقطة x =0 وهو صفر الدالة $p(x)$ وهـذا لا يؤثر في الحل العام ولهذا نبحث أولا عن العمل للمعادلة الأخـــيرة فـــي المجـــال $-1<x<0$ ثم في المجال $0<x<1$

المعادلة الأخيرة عبارة عن معادلة خطية من المرتبة الأولى لـــ ϑ' وعامل تكميل هذه المعادلة هو $x^2(1-x^2)$ إذن :

$$\left[x^2(1+x^2)\vartheta'\right]' = 0$$

$$x^2(1-x^2)\vartheta' = A'$$

ومنه
$$\vartheta(x) = A'\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)} + B = A'\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx + B$$

$$= A'\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right] + B$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية من الشكل :

$$y = A\left[1-\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right] + Bx = Ay_2 + By_1$$

حيث
$$y_2 = 1-\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

وهو الحل الثاني للمعادلة .

ونلاحظ أن الدالة $\vartheta(x)$ غير معرفة عند النقطة $x=0$ وواضح ان نهاية $y_2(x)$ عندما $x\to 0$ موجودة . فالدالة $y_2(x)$ المعرفة على المجال $-1<x<1$ تحقق المعادلة التفاضلية على المجال $-1<x<1$ وليس فقط على المجالين $-1<x<0$ و $0<x<1$. من جهة أخرى تصبح y_2 غير منتهية عندما $x\to\pm1$ وهذا يتفق تمام مع ان معامل y'' في المعادلة ينعدم عندما $x\to\pm1$ بينما معاملي y, y' لا ينعدمان وسنعود لهذا الموضوع فيما بعد .

6.VIII المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :
Second order Homogenoes Linear Differential Equations with constant coefficients .

نعود الآن إلى الدراسة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية بغية الحصول على حلول ذات المعاملات الثابتة وتكتب هذه المعادلات على الصورة:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (12)$$

حيث $c,b,a \neq 0$ ثوابت اختيارية نفترضها حقيقية للملاءمة وبناء على النظرية -6- فانه يوجد حلان مستقلان خطيا للمعادلة (12) ولإيجاد هذين الحلين نلاحظ أولا أن هذه المعادلة هي علاقة خطية بين $y(x)$ ومشتقاتها والدالة التي يمكن أن تحقق مثل هذه العلاقة الخطية هي الدالة الآسية e^{mx} . لكن لقيم خاصة أو مميزة يراد تعينها للثابت m ويرجع ذلك لكون الدالة الآسية هي الدالة الوحيدة التي تناسب جميع مشتقاتها معها ومع تعضها البعض .
اذن نفرض حلا للمعادلة (12)على الصورة الآسية $y = e^{mx}$:

$$y = e^{mx} \Rightarrow y' = me^{mc}, y'' = m^2 e^{mx} \qquad (13)$$

وبالتعويض عن y ومشتقاتها من (13) في (12) واخذ e^{mx} عاملا مشتركا نجد أن :

$$(\alpha m^2 + bm + c)e^{mx} = 0$$

وحيث أن e^{mx} لا يمكن أن تنعدم . إذن يجب أن ينعدم القوس :

$$\alpha m^2 + bm + c = 0 \qquad (14)$$

أي انه كي تكون e^{mx} حلا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة (12) فان الثابت m يجب أن يحقق المعادلة (14) والتي هي معادلة جبرية من الدرجة الثانية في m وتسمى المعادلة (14) المعادلة المميزة (Characteristic or Auxiliary Equation) أو المعادلة المساعدة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة للمعادلة (14) جذرين هما :

$$m_1 = \frac{1}{2\alpha}\left[-b + \sqrt{b^2 - 4\alpha c}\right] \tag{15}$$

$$m_2 = \frac{1}{2\alpha}\left[-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$$

واضح أن طبيعة حلول المعادلة (12) تتعلق بقيمتي m_2, m_1 والتي بدورها تتعلق المعاملات الثابتة في المعادلة التفاضلية من خلال العلاقة (15) وهناك ثلاث حالات جديرة بالاعتبار :

1- الجذران حقيقيان متمايزان $b^2 - 4\alpha c > 0$

في هذه الحالة يكون الحلان $e^{m_1 x}$, $e^{m_2 x}$ حلين مستقلين خطيا ويكون الحل العام من الصورة :

$$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} \tag{16}$$

<u>**مثال -15-**</u>

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

هذه معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المميزة هي $m^2 - 5m + 6 = 0$ وجذراهــا $m_2 = 3, m_1 = 2$
حقيقيان متمايزان وحلها العام هو :

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

<u>ملاحظة :</u> على انه إذا كان المميز (descricant) $b^2 - 4\alpha x$ كمية غير جذرية فانه يمكن وضع m_2, m_1 على الصورة :-

$$m_2 = p - q \qquad , \qquad m_1 = p + q$$

حيث

$$p = -b/2\alpha \qquad , \qquad q = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{b^2 - 4\alpha c}$$

وفي هذه الحالة يمكن وضع الحل العام (16) على صورة أخرى كما يلي :-

$$y = Ae^{(p+q)x} + Be^{(p-q)x} = Ae^{px}e^{qx} + Be^{px}.e^{-qx}$$

$$= e^{px}\left[Ae^{qx} + Be^{-qx}\right] = e^{px}\left[A(\cosh x + \sinh x) + B(\cosh x - \sinh x)\right]$$

$$\therefore \quad y = e^{px}\left[A_1 \cosh x + B_1 \sinh x\right]$$

حيث $B_1 = A - B, A_1 = A + B$ ثابتان اختياريان آخران .

<u>مثال -16-</u>

المعادلة التفاضلية $y'' + 2y' - y = 0$
لها معادلة مميزة من الصورة :

$$m^2 + 2m - 1 = 0$$

وجذراهــا همــا : $m_2 = 1 - \sqrt{2} \quad , \quad m_1 = 1 + \sqrt{2}$

وعليه يكون الحل العام هو :

$$y = Ae^{(-1+\sqrt{2})}x + Be^{(-1-\sqrt{2})}x = e^{-x}\left[A_1 \cosh \sqrt{2x} + B_1 \sinh \sqrt{2x}\right]$$

-2- جذران مركبان مترافقان $b^2 - 4\alpha c < 0$

إذا كان المميز $b^2 - 4\alpha c$ كمية سالبة كان الجذران مركبين ومترافقين ليكن :-

$$m_1 = \alpha + iB \quad , \quad m_2 = \alpha - iB$$

حيث

$$\alpha = \frac{b}{2\alpha} \quad , \quad B = \sqrt{4\alpha c - b^2} \quad , \quad i^2 = -1$$

يكون الحلان $e^{m_2 x}$, $e^{m_1 x}$ حلين مستقلين خطيا ويكون الحل العام من الصورة :

$$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

وباستخدام علاقة اويلر (Euler) $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ يمكن تحويل هذه الصورة المركبة إلى صورة حقيقية كما يلي :-

$$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} = Ae^{(\alpha + i\beta)x} + Be^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$y = e^{\alpha x}\left[Ae^{iBx} + Be^{-iBx}\right] = e^{\alpha x}\left[A(\cos\beta x + i\sin\beta x) + B(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[(A + B)\cos \beta x + \right]$$

وضع $A_1 = A + B$ و $B_1 = i(A - B)$ نحصل على :

$$y = e^{\alpha x}\left[A_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x\right] = Ce^{\alpha x}\cos(\beta x + \mu)$$

حيث $\mu = \tan^{-1}\frac{B_1}{A_1}$ و $C = \left(A_1^2 + B_1^2\right)^{1/2}$

ويلاحظ أن هناك دائما ثابتين اختياريين A, B أو A_1, B_1 أو μ, C

مثال -17-

لتكـن المعادلـــــة :- $y'' + y' + y = 0$

المعادلة المميزة هي :- $m^2 + m + 1 = 0$

وجذراها هما :- $m_1 = -\frac{1}{2} + 1\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

وعلى ذلك يكون الحل العام هو :

$$y = Ce^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \mu\right)$$

3- جذران متساويان :

أي إن هناك جذرا واحدا مزدوجا هو $b/_2\, a$ ويكون $e^{-bx/2a}$ هو أحـــد الحليـــن المستقلين خطيا والحل الأخر نستطيع الحصول عليه باستعمال طريقة تخفيض المرتبـة للمعادلة التفاضلية الخطية .

ليكن $y = \vartheta(x)e^{-(b/2a)x}$

إذن :

$$y' = \vartheta'(x)e^{-\frac{bx}{2a}} - \frac{b}{2a}\vartheta(x)e^{-\frac{bx}{2a}} = \left(\vartheta' - \frac{b}{2a}\vartheta\right)e^{-\frac{bx}{2a}}$$

بالتعويض في المعادلة (12) والقســـمة علـــى العـــامل المشـــترك $e^{-(b/2a)^x}$ نحصـــل علـــى:-

$$a\left(\vartheta'' - \frac{b}{a}\vartheta' + \frac{b^2}{4a^2}\vartheta\right) + \left(\vartheta' - \frac{b}{2a}\vartheta\right) + C\vartheta = 0$$

بعد ترتيب الحدود نحصل على :

$$a\vartheta'' - \left(\frac{b^2}{4a} - C\right) = \vartheta = 0$$

وبما انه $b^2 - 4aC = 0$ إذن فالحد الثاني في هذه المعادلة معدوم ونحصل على :

$$\vartheta'' = 0$$

أذن :- $\vartheta(x) = Ax + B$

حيث A , B ثابتان اختياريان يكون الحل العام هو :

$$y = e^{-bx/2a}(Ax + B)$$

<u>مثال -18-</u>

جد المعادلة التفاضلية : $y'' + 4y' + 4 = 0$

الحل :-

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي : $m^2 + 4m + 4 = 0$

ويكون جذراهما عبارة عن جذر مزدوج $m = -2$

وبالتالي يكون الحل العام هو :

$$y = e^{-2x}(Ax + B)$$

ملخص : وفيما يلـــي ملخــص لهــذه الحـــالات الثـــلاث :

جذرا المعادلة المميزة	المميز	قاعدة الحلول	الحل العام
متمايزان حقيقيان m_1 , m_2	$b^2 - 4aC > 0$	$\{e^{m_1 x} , e^{m_2 x}\}$	$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$
متمايزان حقيقيان m_1 , m_2	$b^2 - 4aC > 0$	$\{e^{px} \cosh qx, e^{px} \sinh qx\}$	$y = e^{px}[A\cosh qx + B\sinh qx]$
مركبان مترافقان $\propto \pm iB$	$b^2 - 4aC < 0$	$\{e^{\alpha x} \cos\beta x, e^{\alpha x} \sin\beta x\}$	$y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$
متساويـــــــــان (جذر مزدوج) $m = -b/2a$	$b^2 - 4aC = 0$	$\{e^{mx} , xe^{mx}\}$	$y = e^{mx}(Ax + B)$

جدول 1—I جذور المعادلة المميزة وقاعدة الحلول والحل العام للمعادلة التفاضلية

$$ay'' + by + c = 0$$

مثال -19-

m_1 , m_2 هما جذرا ن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية :

$$\alpha y'' + by' + cy = 0$$

I—أثبت أن الحلين e^{m_1x} , e^{m_2x} يكونان حليـــن مســـتقلين خطيـــاً فقـــط إذا كـــان $m_1 \neq m_2$

II—إذا كان $m_1 \neq m_2 = m = -b/2a$ فاثبت بـــالتعويض المباشـــر فـــي المعادلة التفاضلية المعرفة أن e^{mx} يصلح حلاً لها . أوجد الحل الأخر المســـتقل خطياً باستعمال (11) :

الحـــل :-

I- لكي يكون الحلان e^{m_1x} , e^{m_2x} مستقلين خطيا يجب أن لا ينعدم الرونســـكيان لهما :

$$W\left(e^{m_1x}, e^{m_2x}\right)=\begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix}=(m_2-m_1)e^{(m_1x+m_2x)}$$

وحيث أن الدالة الآسية لا تساوي الصفر إذن لا ينعدم الرونسيكان طالما لا يتســـاوى الجذران m_1 , m_2 ويكون الحلان مستقلين خطيا .

II—عندما ينعدم المميز يكون $b^2 = 4\alpha C$ أي أن $C=\dfrac{b^2}{4a}$ ويكون الجذران متساويين وهما $m_1 \neq m_2 = m = -b/2a$ وبالتعويض e^{mx} في المعادلـــة المعطـــاة واخذ e^{mx} مشتركا نحصل على :

$$\left(\alpha m^2+bm+C\right)e^{mx}=\left[\alpha\left(-\frac{b}{2\alpha}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2\alpha}\right)+\frac{b^2}{4\alpha}\right]e^{mx}$$

$$=\left[\frac{b^2}{4\alpha}-\frac{b^2}{2\alpha}+\frac{b^2}{4\alpha}\right]e^{mx}$$

أي أن $e^{bx/2\alpha}$ هو حل للمعادلة المعطاة ويكون الحل الآخر باستخدام (11) حيث :

$$p(x)=\frac{b}{\alpha}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int pdx}}{y^2} dx = e^{-bx/2a} \int \frac{e^{-bx/a}}{e^{-bx/2Q}} dx = e^{-bx/2a} \int dx$$

$$= xe^{-bx/2a}$$

ويكون الحل العام هو : $y(x) = Ay_1 + By_2 = e^{-bx/2a}[A + Bx]$

-7- المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة :-

Nonhomogeneous Linear Differential Equations

نبحث الآن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة الثانية والتي على الصورة :

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (17)$$

حيث $L[y]$ هو المؤثر التفاضلي الخطي و $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ دوال مستمرة على مجال معين .

لتكن $y_h(x)$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $L[y] = 0$ وهي التي تحصل عليها باختزال الطرف الأيمن $g(x)$ إلى الصفر وكما ذكرنا سابقا تسمى المعادلة $L[y] = 0$ بالمعادلة المتجانسة (Homogenous Equation) ويسمى $y_h(x)$ بالحل المتجانس أو الحل المتمم (Homogeneous solution) وعلى ذلك :

$$L[y_h] = 0 \qquad (18)$$

الحل المتجانس هو نفسه الحل المعطي بالعلاقة (نظرية 4) :-

$$y_h(x) = Ay_1 + By_2(x)$$

والذي يحتوي على ثابتين اختياريين A , B و $\{y_1 , y_2\}$ هي قـــاعدة فئـــة الحلـــول (نظرية 5) أي y_1 , y_2 حلان مستقلان خطيا للمعادلة المتجانسة .

ليكن $y(x)$ هو أي حل خاص (Particular solution) لا يحتوي علـــى ثوابــت اختيارية للمعادلة غير المتجانسة $L[y]=g(x)$. أي :

$$L[y_P]=g(x) \qquad (19)$$

نظرية -7-

الحل العام للمعادلة الخطية غير المتجانسة $L[y]=g(x)$ هو الحـــل العـــام للمعادلـــة الخطية المتجانسة $L[y]=0$ زائدا حل خاص لا يحتـــوي علـــى ثوابـــت اختياريـــة للمعادلة الخطية غير المتجانسة أي :

$$y(x)=y_h(x)+y_P(x)$$

البرهان :

بما إن $L[y_h]=0$, $L[y_P]=g(x)$

إذن ينتج من خطية المؤثر L أن :

$$L[y_h+y_P]=L[y_h]+L[y_P]=0+g(x)=g(x)$$

أو

$$L[y_h+y_P]=g(x)$$

هذا يعني انه y_h+y_P هو حل للمعادلة $L[y]=g(x)$ ويبقى أن نثبت أن هذا الحـــل هو حل عام ويتم ذلك بإثبات أن أي حل للمعادلة $L[y]=g(x)$ يمكن وضعـــه علـــى الصورة :

$$y=y_h+y_P$$

ليكن y أي حل للمعادلة : $L[y]=g(x)$

بوضع $\Phi = y - y_P$ إذن :-

$$L[\Phi]=L[y-y_P]=L[y]-L[y_P]=g(x)-g(x)=0$$

أي أن Φ هو حل عام للمعادلة المتجانسة $L[y]=0$. لكن $\Phi = y - y_P$ وعليه

$$y=\Phi+y_P$$

حيث Φ هو حل المعادلة المتجانسة $L[y]=0$.

مثال -20-

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية : $y''-y=3e^{2x}$

المعادلة المتجانسة هي $y''-y'=0$

هذه المعادلة تقبل الحلين المستقلين خطيا التاليين e^{x}, e^{-x} وبالتالي فالحل المتجانس هو $y_h = Ae^{-x}+Be^{-x}$

حيث A , B ثابتان اختياريان وهناك حل خاص للمعادلة غير المتجانسة هو e^{2x} .

وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة المعطاة هو :

$$y(x)=y_h+y_p=Ae^{x},Be^{-ex}+e^{2x}$$

ملاحظات :

1—إذا كانت $y_{p_1}(x)$ حلاً خاصاً للمعادلة غير المتجانسة $L[y]=R_2(x)$ وكانت $y_{p_2}(x)$ حلا خاصا للمعادلة الخطية غير المتجانسة $L[y]=R_2(x)$ فان $y_{P1}(x)+y_{P2}(x)$ تكون حلا خاصا للمعادلة الخطية غير المتجانسة $L[y]=R_1(x)+R_2(x)$

وعموماً إذا كانت $y_{P_i}(x)$ حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية $L[y]=R_i(x)$ فانـــه $\sum_i y_{Pi}(x)$ تكون حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية $L[y]=\sum_i R_1(x)$.

إثبات ذلك يسير وينتج من التعويض مباشرة حيث :-

$$L[y_{p1}]=y''_{p1}+p(x)y'_{p1}+q(x)y_{p1}=R_1(x)$$

$$L[y_{P_2}]=y''_{P1}+p(x)y_{P2}+q(x)y_{P_2}=R_2(x)$$

وبجمع المعادلتين نجد :-

$$(y_{P_1}+y_{P_2})''+p(x)(y_{P_1}+y_{P_2})'+q(x)(y_{P_1},y_{P_2})=R_1+R_2$$

أي إن $L[y_{P_1}+y_{P_2}]=R_1(x)+R_2(x)$

وتفيد هذه الخاصية كثيرا في أيجاد حل خاص للمعادلة $L[y]=R(x)$ حيث يمكـــن تقسيم الدالة $R(x)$ إلى عدة أجزاء جمعية ثم أيجاد الحل الخاص المقابل لكل جزء ثـــم بالجمع تحصل على الحل الخاص المطلوب .

2- قد يوجد اكثر من حل خاص y_P للمعادلة الخطيـــة المتجانســـة $L[y]=R(x)$ ولكن الفرق بين هذه الحلول يكون عادة جزاء من أحد الحلول للمعادلـــــة المتجانســـة $L[y]=0$ بحيث أن الحل العام للمعادلة $L[y]=R(x)$ ، باستخدام أحد الحلـــول الخاصة ، يمكن الحصول على صورته العامة .

مثال -21-

لتبيان أن اختيار الحل الخاص y_P لمعادلة تفاضلية خطية غير متجانسة لا يهم كثيراً .
بين إن $y_{P_1} = -\cos x$, $y_{P_2} = e^x - casx$ هما حلان خاصان للمعادلة الخطية غير المتجانسة $y'' - y = 2\cos x$ وإذا كان الحلان المستقلان للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$ هما e^x , e^{-x} فاكتب الحل العام للمعادلة غير المتجانسة مرة باستخدام الحل الخاص y_{P_1} ومرة باستخدام y_{P_2} . بين انه يمكن تحويل أحد هذين الحلين العامين للآخر .

الحل :

بالتعويض المباشر نرى أن $y_{P_1} = -\cos x$ و $y_{P_2} = e^x - \cos x$ هما حلان خاصان للمعادلة $y'' - y = 2\cos x$

الطرف الأيمن = $y''_{P_1} - y_{P_1} = (-\cos x)'' - (-\cos x) = 2\cos x$

الطرف الأيسر = $y''_{P_2} - y_{P_2} = (e^x - \cos x)'' - (e^x - \cos x) = 2\cos x$

إذن $y_{P_1} = -\cos x$, $y_{P_2} = e^x - \cos x$

هما حلان خاصان

إذا كان الحلان المستقلان للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$ هما

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$

الحل العام الأول للمعادلة غير المتجانسة هو $y = Ay_1 + By_2 + y_{P_1}$

$$y = Ae^x + Be^{-x} - \cos x$$

الحل العام الثاني للمعادلة غير المتجانسة هو :- $y = Ay_1 + By_2 + y_{P_2}$

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} + \left(e^{x} - \cos x\right) = (A + B)e^{x} + Be^{-x} - \cos x$$

وبوضع $A' = A + B$ نجد :-

$$y = A'e^{x} + Be^{-x} - \cos x$$

وهو نفس الحل العام الأول حيث A , B , A′ ثوابت اختيارية .

مثال -22-

جد الحل العام للمعادلة :

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin x$$

الحل :-

أولاً : نأخذ المعادلة المتجانسة $y'' + 4y = 0$

وبالتعويض عن $y = e^{mx}$ نحصل على المعادلة المميزة $m^2 + 4 = 0$

ويكون الحل المتجانس من الشكل :

$$y_H = A\cos 2x + B\sin 2x$$

ثانياً : للبحث عن الحل الخاص للمعادلة نركب الحلول الخاصة للمعادلات :

$$y'' + 4y = 1 \quad , \quad y'' + 4y = x \quad , \quad y'' + 4y = \sin x$$

ويمكن بسهولة التحقق من أن $\frac{1}{4}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{1}{3}\sin x$ هي حلولا خاصة لـهذه المعادلات على التوالي . إذن الحل العام للمعادلة المعطاة هي :-

$$y = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{3}\sin x$$

vii-8- طريقة المعاملات غير المعينة: Method of undetermined coefficients

سندرس في هذه الفقرة إحدى الطرق المختلفة للحصول على الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذوات المعاملات الثابتة في ضوء ما رأيناه في الفقرات السابقة من تعاريف ونظريات . وتعطي المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة الثانية والتي معاملاتها ثوابت على الصورة :-

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x)$$

حيث $c, b, a \neq 0$ ثوابت حقيقية اختيارية والحد المتجانس $g(x)$ هو دالة عامة في x قد تكون دالة آسية $e^{\alpha x}$ أو كثير حدود $(a_0x^n + ... + a_n)$ أو دالة جيبيه $(\cos\beta x \quad , \quad \sin\beta x)$.

ونعلم من النظرية -7- أن الحل العام $y(x)$ للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة $L[y] = g(x)$ يتكون من مجموع حلين :

1- الحل العام التجانس أو المتمم $y(x)$ للمعادلة الخطية المتجانسة $L[y] = 0$

2- أي حل خاص $y_p(x)$ للمعادلة الخطية غير المتجانسة $L[y] = g(x)$

أي أن :
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ودرسنا في الفقرات السابقة طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة ويكون هذا الحل المتجانس $y_h(x)$.

ويبقى أن ندرس في هذه الفقرة والتي تليها طرق الحصول على الحل الخاص $y_p(x)$ وتتراوح الطرق المتبعة للحصول على الحل الخاص بين كونها طرقا تخمينية إلى كونها طرقا قائمة على أساس نظري قوي . وتتبني مصداقية أي طريقة على مقدرتها الحصول على أي حل خاص يحقق المعادلة .

$$L[y] = g(x)$$

وقد يختلف حلان خاصان لنفس المعادلة باختلاف التقنية المتبعة في الحل ,لكن الفرق بينهما هو نفس النوع الذي ذكرناه في المثال قبل السابق .

وتتلخص طريقة المعاملات غير المعنية في فرض حل خاص $y(x)$ بصرف النظر عن ثوابت ضربية كحل تجريبي (Trial solution) ويعتمد شكل هذا الحل الخاص على شكل الدالة $g(x)$ وتكون هذه الثوابت الضربية المعاملات غير المعينة والتي يتم تعينها بالتعويض من الحل المفترض $y_p(x)$ ومشتقاته في المعادلة غير المتجانسة المعطاة (20) ثم مساواة معاملات الحدود المتشابهة على طرفي المتطابقة الناتجة .

وتمتاز هذه الطريقة بيسرها وبساطتها مقارنة بالطرق العامة الأخرى التي سنناقشها فيما بعد لكن عيبها هو محدوديتها على المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ومع أنماط محدودة للدالة $g(x)$.

قبل البدء في مناقشة الطريقة العامة لنأخذ الأمثلة البسيطة التالية لتوضيح الطريقة .

<u>مثال -23-</u>

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

الحـــل :-

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (i) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

نجرب حلاً خاصـــاً علـــى الصـــورة (ii) $y_P = Ax^2$

حيث A ثابت ضربي يراد تعينه بالتعويض من (ii) في (i)

$$2A - 6Ax - 4Ax^2 = 4x^2 \qquad (iii)$$

وحتى تتحقق هذه المتطابقة لجميع قيم x يجب أن تتساوى معاملات قوى x المختلفة على الطرفين للمعادلة أي أن :- $2A = 0, \; -6A = 0 \;, \; -4A = 4$

ولا يمكن أن يحقق الثابت الاختياري A هذه المتطابقات الثالثة في آن واحد . وعليـــه فانه غير ممكن إيجاد حل خاص للمعادلة (i) من الشكل (ii) $y_P = Ax^2$. لكـــن حينما نرى الحد الغير المتجانس $4x^2$ في المعادلة (i) علـــى الشـــكل كثـــير حـــدود $4x^2 + ox + o$ فانه واضح أن نفرض أن الحل الخاص من الصورة .

$$y_P(x) = Ax^2 + Bx + C \qquad \text{(iv)}$$

حيث C, B, A ثوابت اختيارية يراد تعينهما بالتعويض من (iv) في (i)

$$2A - 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

بمساواة معاملات قوى x المتشابهة على الطرفين نحصل على : -

$$2A - 3B - 4C = 0$$

$$-6A - 4B = 0$$

$$-4A = 4$$

مما يعنى أن $A=-1$ ، $B=3/2$ ، $C=-13/8$ وعليه يكون الحل الخاص هو :-

$$y_P(x)=-x+3/2\,x-\frac{13}{8}$$

مثال -24-

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (i) $y''+y'-2y=\sin x$

الحـــل :

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية(i) نجرب حلاً خاصاً على الصورة :

$$y_P=A\sin x \qquad (\text{ii})$$

ونعوض من (ii) في(i) لنجد أن :

$$-A\sin x+A\cos x-2A\sin x=2\sin x \qquad (\text{iii})$$

وبمساواة معاملات $\cos x$, sinx على الطرفين نجد أن $A=0$, $-3A=2$
وواضح أن لا معني لذلك . أي أن (ii) لا تصلح حلا خاصا للمعادلة المعطـــاة (i) .
نعدل هذا الحل التجريبي في ضوء الطرف الأيسر للمتطابقـــة (iii) ليصبـــح علـــى الصورة :-

$$y_P(x)=A\sin x+B\cos x \qquad (\text{iv})$$

بالتعويض من (iv) في (i) نجد أن :

$$-(A\sin x+B\cos x)+(A\cos x-B\sin x)-2(A\sin x+B\cos x)=2\sin x$$

بمساواة معاملي sinx , $\cos x$ علي الطرفين نجد أن :-

$$-3A-B=2 \qquad ,-3B+A=0$$

أي أن $A=-3/5 \quad , \quad B=-1/5$

ويكون الحل الخاص هو :- $y_P=-\frac{1}{5}[3\sin x+\cos x]$

مثال -25-:

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $(i) \qquad y''+y=x^2.e^x$

الحل :

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (i) نجرب حلا خاصا على الصورة :

$$y_P(x)=Ax^2e^x \qquad (ii)$$

نعوض من (ii) في (i) لنجد إن $(iii) \quad A(2x^2+4x+2)e^x=x^2e^x$

وبمساواة معامل الحدود المتشابهة على الطرفين نجد أن :

$$A=1\ ,4\text{A}=0\ \ ,2\text{A}=0$$

لا معني لذلك وبالتالي لا تصلح (ii) حلا خاصا . نعدل فرضيا في ضوء الطـــرف الأيسر للمتطابقة (iii) ليصبح :

$$y_P=(Ax^2+Bx+C)e^x \qquad (\text{iv})$$

بالتعويض من (iv) في (i) نجد أن :

$$\{2Ax^2+(4A+2B)x+(2A+2B+2C)\}e^{-x}=x^2e^x$$

بمساواة معاملات قوة x المختلفة على الطرفين نجد أن :

$$2A=1\quad ,\ 4\text{A}+2\text{B}=0\quad ,2A+2B+2C=0$$

ومنها نجد أن $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\frac{1}{2}$ وعليه يكون الحل الخاص هو :

$$y_P(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)e^x$$

ولطبيعة الحال لن نستمر على هذا المنوال سنورد الآن أهم القواعد التي تساعدنا على فرض شكل مناسب للحل الخاص .

القاعدة الأساسية :

إذا لم يكن هناك اية حدود مشتركة بصرف النظر عن أية ثوابت ضربية بين $g(x)$ والحل المتجانس $y_h(x)$ للمعادلة $L[y]=0$ فان الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانس $L[y]=g(x)$ يفرض على الصورة :

$$y_P(x)=A_1r_1(x)+A_2r_2(x)+.....+A_gr_g(x)$$

حيث فئة الحلول $\{r_i(x)\}$ هي الحدود المختلفة المكونة للدالة $g(x)$ (بصرف النظر عن أي ثوابت ضربية) علاوة على الحدود الجديدة التي تنتج في المشتقة العليا لهذه الحدود مع (إهمال أي ثوابت ضربية تظهر) فئة الثوابت $\{A_i\}$ هي معاملات غير معينة يراد تعينها .

لتوضيح لهذه القاعدة نطبقها على الأمثلة السابقة (1-2-3)

في المعادلة الأولى $g(x)=4x^2$ والحدود ومشتقاتها العليا هي $8x$, 8 وبالتالي نفرض الحل الخاص على الصورة $y_p=Ax^2+Bx+C$ حيث امتصت الأعداد 8, 8 في الثوابت A,B,C علي الترتيب .

في معادلة المثال – $g(x)=\sin x-24$ (بإهمال الثابت الضربي) والحدود الجديدة التي تظهر في مشتقاتها العليا هي $\cos x$ فقط . وبالتالي يكون الحل الخاص على الصورة : $y_p=A\cos x+B\sin x$

بينما في معادلة المثال $-3-$ $g(x)=x^2e^x$ ومشتقاتها العليا هي :

$(x^2+2x)e^x$ و $(x^2+4x+2)e^x$ و $(x^2+6x+6)e^x$ وهكذا :-

وواضح أن الحدود غير الموجودة في $g(x)$ والتي ظـــهرت فـــي المشـــتقات هـــي e^x , xe^x وعلى ذلك يكون الحل الخاص على الصورة :-

$$y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x$$

<u>ملاحظـــة</u> :-

تفشل طريقة المعاملات غير المعينة إذا ظهر عدد لانهائي من الحدود الجديدة في المشتقات العليا للدالة $g(x)$

مثال ذلك إذا كان $g(x)=\tan x$ فان عددا لانهائي من الحدود الجديدة يظـــهر فـــي المشتقات العليا وبالتالي لا تنطبق طريقة المعاملات غير المعنية في هذه الحالة .

وبناءا على هذه القاعدة الأساسية نستنبط القواعد الخاصة التالية :-

1-إذا كان $g(x)=P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة

$$P_n(x)=\mathrm{Q}_0x^n+\mathrm{Q}_1x^{n.1}+.....+\mathrm{Q}_\mathrm{n}\ :n$$

في هذه الحالة تكتب المعادلة التفاضلية على الصورة :-

$$\mathrm{Q}y''+by'+cy=\mathrm{Q}_0x^n+\mathrm{Q}_1x^{n-1}+......+\mathrm{Q}_\mathrm{n} \qquad \text{(i)}$$

للحصول على الحل الخاص نفرضه على الصورة :-

$$y_p(x)=A_0x^{n-1}+A_{n-2}x^2+A_{n-1}.x+A_n \qquad \text{(ii)}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$Q[n(n-1)A_0x^{n-2}+....+2A_{n-2}]+b[nA_0x^{n-1}+...+A_{n-1}]$$
$$+C[A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_n]=Q_0x^n+....+Q_n \qquad (iii)$$

بمساواة معاملات مختلفة x على الطرفين نجد :

$$CA_0=Q_0$$

$$CA_1+nbA_0=Q_1$$

$$CA_n+bA_{n-1}+2QA_{n-2}=Q_n$$

إذا كان $C\neq 0$ فان حل المعادلة الأولى هو $A_0=Q_0/C$ ثم بالتعويض في المعادلة التالية نجد $A_1, A_2, ..., A_n$ بالترتيب .

إذا كان $C=0$ ولكن $b\neq 0$ فيكون كثير الحدود في الطرف الأيسر من الدرجة $(n-1)$ ولا يمكن أن تتحقق المعادلة (iii) وحتى يكون $ay''+by'$ كثير حدود من الدرجة n يجب اختيار $y_P(x)$ على شكل كثير حدود من الدرجة $n+1$.

أذن نفرض أن :

$$y_P(x)=x(A_0e^n+.....+A_n)$$

حيث لا يوجد حد ثابت في عبارة $y_P(x)$ لأنه ليس من الضروري إدخال هذا الحد الثابت عندما يكون $C=0$ فأي ثابت هو حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة .

وبما أن $b\neq 0$ فان $A_0=\dfrac{Q_0}{b(n+1)}$ وبالمثال يمكن تعين المعاملات $A_n,.......A_1$

وإذا كان $b=0$ و $C=0$ نفرض الحل الخاص من الشكل

$$y_p=x^2(A_0x^n+....+A_n)$$

الحد $Qy''_P(x)$ يحدث الحد من الدرجة n ويمكن إن نسير وفق ما سبق ونلاحظ ان الحد الثابت والحد الخطى قد أهملا في عبارة y_P . في هذه الحالة يظهر الحدين في الحل المتجانس .

2- إذا كان $g(x) = e^{\propto x} P_n(x)$ كثير حدود في دالة آسية $y(x) = e^{\propto x}\left[A_0 x^n + A_n\right]$: في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية من الصورة :-

$$Qy'' + by' + Cy = e^{\propto x} P_n(x) \qquad \text{(i)}$$

نفرض الحل الخاص من الشكل : $y_P(x) = e^{\propto x} U(x)$

إذن $y'_P(x) = e^{\propto x}\left[U'(x) + \propto U(x)\right]$

و $y''_P(x) = e^{\propto x}\left[U''(x) + 2 \propto U'(x) + \propto^2 U(x)\right]$

بالتعويض عن y'', y', y في المعادلة (i) وباختصار الحد $e^{\propto x}$ نجد :-

$$Qu''(x) + (2Q \propto + b)u'(x) + (Qx^2 + b \propto + C)u(x) = P_n(x) \qquad \text{(ii)}$$

ولتعيين الحل الخاص لهذه المعادلة (ii) فهي نفس المسالة التي ناقشناها في الفقرة السابقة .

إذ أكان $Q \propto^2 + b \propto + C \neq 0$ فان الحل يكون من الشكل $U(x) = A_0 x^n + A_n$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (i) على الصورة :-

$$y_P(x) = e^{\propto x}\left[A_0 x^n + ... + A_n\right] \qquad \text{(iii)}$$

من ناحية أخرى إذا كان $Q \propto^2 + b \propto + C = 0$, $2Q \propto + b \neq 0$ فان :

$$U(x) = x\left(A_0 x^n + ... + A_n\right)$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (i) :- $y_P = e^{\propto x} x\left(A_0 x^n + ... + A_n\right)$

ونلاحظ أن في حالة $Q \propto^2 + b \propto + C = 0$ فان $e^{\propto x}$ هو حل للمعادلة المتجانسة إذ كان $Q \propto^2 + b \propto + C = 0$ و $2Q \propto + b = 0$ ففي هذه الحالة $e^{\propto x}$, $xe^{\propto x}$ هما حلان للمعادلة المتجانسة إذن الصورة الصحيحة للحل $U(x)$ هي :

$$U(x) = x^2\left(A_0 x^n + ... + A_n\right)$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (i) من الصورة : $y_P = e^{\propto x} x^2\left(A_0 x^n + ... + A_n\right)$

3- إذا كان : $g(x) = e^{\propto x} P_n \cos Bx$ أو $g(x) = e^{\propto x} P_n(x) \sin Bx$

هاتان الحالتان متشابهتان . لنأخذ الحالة الأخيرة $g(x) = e^{\propto x} P_n(x) \sin Bx$

ويمكن اختزال هذه الحالة إلى السابقة التي درسناها في الفقرة السابقة حيث :

$$g(x) = P_n(x) e^{\propto x} \frac{1}{2i}\left[e^{iBx} - e^{-iBx}\right] = \frac{1}{2i} P_n(x)\left[e^{(\propto + iB)x} - e^{(\propto - iB)x}\right]$$

ويمكن اختيار الحل الخاص من الصورة :-

$$y_P(x) = e^{(\propto + iB)x}\left[A_0 x^n + ... + A_n\right] + e^{(\propto - iB)x}\left[B_0 x^n + ... + B_n\right]$$

أو الصورة المكافئة :-

$$y_P(x) = e^{\propto x}\left(A_0 x^n + ... + A^n\right)\cos Bx + e^{\propto x}\left[B_0 x^n + ... + B_n\right]\sin Bx$$

عادة تكون الصورة الأخيرة هي المفضلة .

وإذا كان $\propto \pm iB$ يحقق المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن بطبيعة الحال ضرب كثير الحدود في x لرفع درجته بدرجة واحدة . وإذا كان الحد غير المتجانس يحتوي على العبارتين $e^{\propto x}\cos Bx$, $e^{\propto x}\sin Bx$ فانه من الملائم معالجة العبارتين معاً ، لان كل عبارة تسبب نفس الصورة للحل الخاص فمثلا :-

إذا كان $g(x) = x\sin x + 2\cos x$ فان الحل الخاص يكون من الصورة :

$$y_P = (A_0 x + A_1)\sin x + (B_0 x + B_1)\cos x$$

بحيث انه لا يكون $\cos x, \sin x$ حلين للمعادلة المتجانسة ونلخص ما سبق في الجدول التالي :-

$g(x)$	$y_P(x)$
$P_n(x) = Q_0 x^n + Q_1 x^{n-1} + ... + Q_n$	$x^5(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A^n)$
$P_n(x).e^{\propto x}$	$x^5(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n)e^{\propto x}$
$P_n(x)e^{\propto x}\begin{cases}\sin Bx \\ \cos Bx\end{cases}$	$x^5[(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n)e^{\propto x}\sin Bx + (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + ... + B_n)e^{\propto x}\cos Bx]$
حيث 5 عدد صحيح غير سالبه $(5 = 0,1,2)$ الذي يؤمن عدم وجود حد في الحل الخاص هو حل للمعادلة المتجانسة .	

جدول -2-

<u>**مثال -26-**</u>

حل باستخدام طريق المعاملات غير المعينة المعادلة التفاضلية التالية :-

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 - 4e^{3x} + 5\sin 2x + xe^{-n}$$

الحـــل :-

نبحث أولا الحل المتجانس وهو حل المعادلة المتجانسة $y'' - y' - 2y = 0$

ومعادلتها المميزة : $m^2 - m - 2 = 0$

وجذراهــا همــا : $m_1 = -1 \quad , m_2 = 2$

ويكون الحل المتجانس من الشكل : $y_h = Ce^{-x} + De^{2x}$

لإيجاد الحل الخاص نستعمل طريقة المعاملات غير المعينة ، قبل ذي بدء .

نلاحظ أن : $g(x) = 2x^2 - 4e^{3x} + 5\sin 2x + xe^{-x}$

ولا توجد حدود مشتركة بين $g(x)$ والحل المتجانس $y_h(x)$ إلا أن e^{-x} حـــد فـــي y_h يقابل الجذر غير المتكرر $m = -1$ بينما xe^{-x} حد في $g(x)$ وعلى ذلـــك فـــالحدود التي تدخل الحل الخاص نتيجة xe^{-x} تنشا عن x^2e^{-x} ومشتقاتها وهذه الحدود هـــي x^2e^{-x} , xe^{-x} , e^{-x} ويستبعد الأخير بسبب وجوده في الحل المتجانس . وعلى ذلك نفرض حلاً خاصاً على الصورة:-

$$y_P = \left(A_1x^2 + A_2x + A_3\right) + \left(A_4e^{3x}\right) + \left(A_5\cos 2x + A_6\sin 2x\right)$$
$$+ x\left(A_7x + A_8\right)e^{-x}$$

ونلاحظ أن جميع أجزاء الحل الخاص المقترح تنتج من القواعد السابقة مباشرة :-

$$y'_P = 2A_1x + A_2 + 3A_4e^{3x} - 2A_5\sin 2x + 2A_6\cos 2x$$
$$+ A_7x(-x+2)e^{-x} + A_8(-x+1)e^{-x}$$

$$y''_P = 2A_1 + 9A_4e^{3x} - 4A_5\cos x - 4A\sin x$$
$$+ A_4\left(x^2 - 4x + 2\right)e^{-x} + A_8(x-2)e^{-x}$$

وبالتعويض عن y_p ومشتقاته في المعادلة المعطاة وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على :

$$(-2A_1)x^2 - 2(A_1 + A_2)x + (2A_1 - A_2 - 2A_3) + 4A_4e^{3x} +$$
$$-(6A_5 + 2A_6)\cos 2x + (2A_5 - 6A_6)\sin 2x + 0x^2e^{-x}$$
$$-6A_7xe^{-x} + (2A_7 - 3A_8)e^{-x} = 2x^2 - 4e^{3x} + \sin 2x + xe^{-x}$$

وبمساواة معاملات الحدود المتشابهة على الطرفين نجد أن :

$$-2A_1 = 2 \qquad \text{(i)}$$

$$A_1 + A_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$2A_1 - A_2 - 2A_3 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

$$4A_4 = -4 \qquad \text{(iv)}$$

$$6A_5 + 2A_6 = 0 \qquad \text{(v)}$$

$$2A_5 - 6A_6 = 5 \qquad \text{(vi)}$$

$$-6A_7 = 1 \qquad \text{(vii)}$$

$$2A_7 - 3A_8 = 0 \qquad \text{(viii)}$$

وحل هذه المعادلات يعطي :-

$$A_1 = -1 \quad , A_2 = 1 \quad , A_3 = -3/2 \quad , A_4 = -1$$

$$A_5 = 1/4 \quad , A_6 = -3/4 \quad , A_7 = -1/6 \quad , \quad A_8 = -1/9$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو :-

$$y_p(x)=x^2+x-\tfrac{3}{2}-e^{3x}+\frac{1}{4}\cos2x-\tfrac{3}{4}\sin2x+x\left(-\frac{1}{6}x-\frac{1}{9}\right)e^{-x}$$

ويكون الحل العام هو الحل المتجانس زائد الحل الخاص :-

$$y=\left(C-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x\right)e^{-x}+De^{2x}-x^2+x-\frac{3}{2}-e^{3x}+\frac{1}{4}\cos2x-\frac{3}{4}\sin2x$$

ملاحظة -1-

حيث أن $g(x)$ تتكون من أربعة حدود فانه يمكن أيجاد الحل الخاص المقابل لكل حد ثم تجمع هذه الحلول الخاصة لتحصل بالطبع على نفس الجواب .

ملاحظة -2-

تعامل الدوال الزائدية $\cosh bx$, $\sinh bx$ معاملة الدوال المثلثية $\sin Bx, \cos Bx$ أو تحول إلي دوال آسية .

وإذا كان $g(x)$ توفقية خطية من الحالات السابقة فان $y_p(x)$ يكون توفقية خطية اخرى من الحالات المقابلة مع تجميع الثوابت حيثما أمكن ذلك .

VII.9- طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلات التفاضلية الخطية :

Method of Variation of Parameters (Lagrange's Method)

تمتاز طريقة لاغرانج لتغيير البارامترات بعموميتها حيث تسري على جميع أنواع المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة سواء كانت ذوات معاملات ثابتة أو ذوات معاملات متغيرة (دوال في x) وبصرف النظر عن نوع الطرف الأيمن $g(x)$.

بعكس الحال في طريقة المعاملات غير المعينة من الدالة $g(x)$ لكن يعيب طريقة لاغرانج .

1 - اكثر مشتقة خصوصا في حالة علو رتبة المعادلة التفاضلية .

2 - اعتمادها علي معرفة الحل المتجانس والذي قد يكون متعذرا في حالة كون المعاملات متغيرة .

3 - تضمنها تكاملات قد يتعذر الحصول عليها على صورة مغلقة .

تكتب المعادلة التفاضلية الخطية على الصورة العامة :-

$$L[y] = y'' + \rho(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (i)$$

والجزء المتجانس من المعادلة هو :-

$$L[y] = y'' + \rho(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (ii)$$

ويتكون الحل المتجانس كما نعلم من حلين مستقلين خطيا $\{y_1, y_2\}$ حيث :-

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (iii)$$

حيث C_1, C_2 ثوابت اختيارية .

وتتلخص طريقة تغيير البارامترات في فرض حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (i) علي الصورة(iii) لكن بعد تغيير الثوابت أو البارامترات$\{C_1 , C_2\}$ إلى $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ليكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة علي الصورة :-

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \qquad (iv)$$

حيث يبقي علينا أن نعين الدوال الاختيارية $\{U_1, U_2\}$ وهذه بحيث يحقق y_p المعادلة غير المتجانسة (i) .

ولتعين هذين الدالتين الاختياريتين يلزم فرض شرطين من القيود وأحد هذين الشرطين هو بالطبع أن يحقق الحل المفروض (iv) المعادلة التفاضلية المعطاة (i) أي $L[y]=g(x)$. أما الشرط الثاني فيمكن فرضه بأكثر من طريقة نختارها بحيث تسهل الحسابات ونيسر الحل .

نفاضل $y_P(x)$ في المعادلة (iii) بالنسبة إلى x فنحصل علي :-

$$y'_P = u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + u_1 y'_1 + u_2 y_2 \qquad (v)$$

سنختار الشرط الأول هو :- $\qquad u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \qquad (vi)$

مع هذا الشرط علي u'_2, u'_1 تعطي y''_P علي الصورة :-

$$y''_P = u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + u' y''_1 + u_2 y''_2 \qquad (vii)$$

بالتعويض عن y''_P, y'_P, y_P في المعادلة (i) نحصل علي :-

$$u_1(y''_1 + \rho(x) y'_1 + q(x) y_1) + u_2(y''_2 + \rho(x) y'_2 + q(x) y_2) + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x)$$

ونلاحظ أن الحدين بين قوسين في العبارة السابقة معدوما لان كل من y_2 , y_1 حليـن للمعادلة التفاضلية المتجانسة (ii) فنحصل علي :-

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(x) \qquad (viii)$$

وبكتابة المعادلة $(vi),(viii)$ نحصل علي نظام من معادلتين :-

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x)$$

أي أن المشتقات الأولى u_1',u_2' يجب أن تحقق 2 من المعادلات المقيدة (Ristriction Equations) ومن هذين المعادلتين نحصل علي المشتقتين u_1',u_2' وبمكاملة كل مشتقة نحصل علي الدالتين المطلوبتين u_1 , u_2 بحل هذا النظام نحصل على :-

$$u_1' = \frac{-y_2 g}{w(y_1, y_2)} \quad , \; u_2' = \frac{y_1 g}{w(y_1, y_2)} \qquad \text{(ix)}$$

حيث $w(y_1,y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2$ والقسمة على $w(y_1,y_2)$ ممكنة لأن $w(y_1,y_2) \neq 0$ على المجال . بمكاملة هذين المعادلتين (ix) ثم نعوض عنهما في المعادلة (iii) فنحصل علي الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة(i) ونلخص إلى النظرية التالية :

نظرية -8-

إذا كانت الدوال $\rho(x), q(x), g(x)$ دوال مستمرة على مجال ما $\propto < x < \beta$ وإذا كانت الدالتان y_1 , y_2 حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة الملحقة للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + \rho(x)y' + q(x)y = g(x)$$

إذن فالحل الخاص لهذه المعادلة يعطي بالعلاقة :-

$$y_P(x) = -y_1(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{w(y_1, y_2)(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{w(y_1, y_2)(x)}dx \qquad (x)$$

مثال 27-

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :-

$$y'' + y = \sec x \qquad 0 < x < \pi/2$$

الحـــل :-

المعادلة المتجانسة هي $y'' + y = 0$

معادلة المميزة $m^2 + 1 = 0$ وجذراها المترافقان هما $m = \pm i$ وبالتالي فالحل المتجانس هو:-

$$y_h = A\cos x + B\sin x$$

ونلاحظ أن المعادلة المعطاة هي معادلة ذات معاملات ثابتة والحل المتجانس معلوم ولكن لا يمكن أن نستخدم طريقة المعاملات غير المعينة لان الحد المتجانس ليس من الشكل المذكور في القاعدة الأساسية والقواعد الخاصة . لهذا نستخدم طريقة تغير البارامترات ونكتب الحل الخاص من الشكل :

$$y_P = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x$$

إذن

$$y'_P = [-u_1 \sin x + u_2 \cos x] + [u'_1 \cos x + u'_2 \sin x]$$

وموضع الحد الثاني بين قوس يساوي الصفر وبالمفاضلة مرة اخرى وبالتعويض في المعادلة الخطية غير المتجانسة نجد :-

$$u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x = 0$$

$$-u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \sec x$$

بحل المعادلتين نجد :- $u_2'(x) = 1$, $u_1'(x) = -\tan x$

$$u_1(x) = \ln\cos x \quad , \quad u_2(x) = x$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :-

$$y_p = x\sin x + (\cos x)\ln|\cos x|$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة من الشكل :-

$$y = A\cos x + B\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|$$

وهــو المطلــوب .

مثال -28-

حل المعادلة التفاضلية التالية مستخدما طريقة تغير البارمترات لا يجاد الحل الخاص:

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 1-x$$

الحــل :-

المعادلة المطلوب حلها هي :- $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 1-x$

المعادلة المتجانسة هي :- $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$

وهذه معادلة معاملاتها ليست ثوابت . بـــــالبحث والتفتيــش نجــد أن أحـــد حلولـــها هو $y_1 = x$ والحل الأخر هو $y_2 = e^x$ وعلى ذلك :

$$y_h = A_x + Be^x$$

نفرض الحل الخاص للمعادلة المعطاة على الصورة :- $y_P = u_1(x)x + u_2(x)e^x$
حيث u_2, u_1 تحققان المعادلتين التاليتين :-

$$u_1'x + u_2'e^x = 0$$

$$u_1' + u_2'e^x = 1 - x$$

بحل هاتين المعادلتين في u_2', u_1' نحصل على :-

$$u_1' = 1 \quad , \; u_2' = xe^{-x}$$

وعليه بالتكامل :- $u_1 = x \quad , \; u_2 = (x+1)e^{-x}$

وبالتعويض في المعادلة y_P يكون الحل الخاص :- $y_P = x^2 + x + 1$
ويكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو :-

$$y(x) = y_h + y_P = Ax + Be^x + x^2 + 1$$
$$= A_1x + Be^x + x^2 + 1$$

حيث $A_1 = A + 1$

وهــــو المطلـــــوب .

تمـــــــارين

I- باستخدام التعويض $\vartheta(x) = y'$, $\vartheta'(x) = y''$ جد حل المعـــادلات التفاضليـــة التالية :-

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0 \quad , \; x > 0$$

$$y'' + xy'^2 = 0$$

$$2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy' \quad , \; x > 0$$

$$yy'' + y'^2 = 0$$

$$y'' + y = 0$$

$$y'' + yy'^3 = 0$$

II- تحقق أن x^2, x^{-1} والتوافقية الخطية $Ax^2 + Bx^{-1}$ حيث A, B ثابتان اختياريان هم حلول للمعادلة التفاضلية التالية :-

$$x^2 y'' - 2y = 0 \qquad x > 0$$

III- تحقق أن $1, x^{1/2}$ هما حلان للمعادلة التفاضلية :-

$$yy'' + y'^2 = 0 \qquad x > 0$$

ولكن التوافقية الخطية $A + Bx^{1/2}$ ليست حلا للمعادلة لماذا ؟

IV- إذا كان $L[y] = ay'' + by' + cy$ حيث $a, b, c, \in IR$

احسب :

$$L[x] \quad , \quad L[\sin x] \quad , \quad L[e^{rx}] : r \in \Re$$

V – احسب رونسكيان الدوال الآتية :-

$$w\left(e^{mx}, e^{nx}\right): \quad m \neq n$$

$$w(\sinh x, \cosh x)$$

$$w\left(x, xe^{x}\right)$$

VI – باستعمال طريقة تخفيض المرتبة جد الحل الثاني للمعادلات التفاضلية التالية:-

$$y'' - 4y' - 12y = 0 \quad , \quad y_1 = e^{6x}$$

$$x^2 y'' + 2xy' = 0 \quad , \quad y_1 = 1$$

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \quad , \quad x > 0, y_1 = x$$

VII- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :-

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$4y'' + 4y' + y = 0$$

$$6y'' - y' - y = 0$$

$$2y'' - 3y + y = 0$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$y'' - 2y' + 6y = 0$$

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

VIII- استعمال طريقة المعاملات غير المعينة , جد الحـــل الخـــاص للمعـــادلات التفاضلية التالية :-

$$y'' + y' - 2y = 2x$$

$$2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$$

$$y'' + 4y = x^2 + 3e^x$$

$$y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$$

$$y'' - 2y' + y = xe^x + 4$$

$$y'' - y' - 2y = \cosh 2x$$

$$y'' + y = x(1 + \sin x)$$

$$y'' + 3y' = 3x^4 + x^2 e^{-3x} + \sin 3x$$

الفصل الثامن

تطبيقات متنوعة على المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

Miscellaneous Applications

الفصل الثامن

تطبيقات متنوعة على المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

Miscellaneous Applications

كما ذكرنا سابقا تدخل المعادلات التفاضلية في شتى مناحي العلوم الهندسية والفيزيائية . ولقد أعطينا عدة تطبيقات في الفصل السادس على المعادلات من المرتبة الأولى و الآن إلى مزيد من التطبيقات علي المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الثانية .

VIII -1ـ تطبيقات هندسية :ـ Geometrical Applications

المثال الأول :-

جد معادلة المنحنى الذي يمر بنقطة الأصل والذي مماسه عندها هو محور x والذي يتناسب معدل تغير ميل مماسه عند أي نقطة مع جذر الإحداثي الراسي لهذه النقطة .

الحل :-

ميل المماس عند النقطة (x, y) هو $\frac{dy}{dx}$. ومعدل تغير ميل المماس هو $\frac{d^2y}{dx^2}$

وعلى ذلك يكون :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{y}$$

حيث a ثابت تناسب . وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تخلو صراحة من المتغير x .

إذن بوضع : $y' = \vartheta$ وبالتالي $y'' = \vartheta \dfrac{d\vartheta}{dy}$ وتتحول المعادلة إلى :-

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dy} = a\sqrt{y} \Rightarrow \vartheta d\vartheta = a\sqrt{y}dy \Rightarrow \vartheta^2 = \frac{4a}{3} y^{3/2} + A_1$$

وحيث أن محور x يمس المنحنى عند نقطة الأصل إذن :

$$\Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow \quad \vartheta = \sqrt{\frac{4a}{3}}.y^{3/4}$$

عند (0.0) لدينا $\vartheta = \dfrac{dy}{dx} = 0$

إذن $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{4a}{3}} y^{3/4} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{4a}{3}} x + A_2 = 4y^{1/4}$

وحيث أن المنحني يمر بنقطة الأصل أذن $A_2 = 0$ وعليه يكون المنحنى المطلـــوب هو :-

$$y = \left(\frac{a}{12}\right)^2 x^4$$

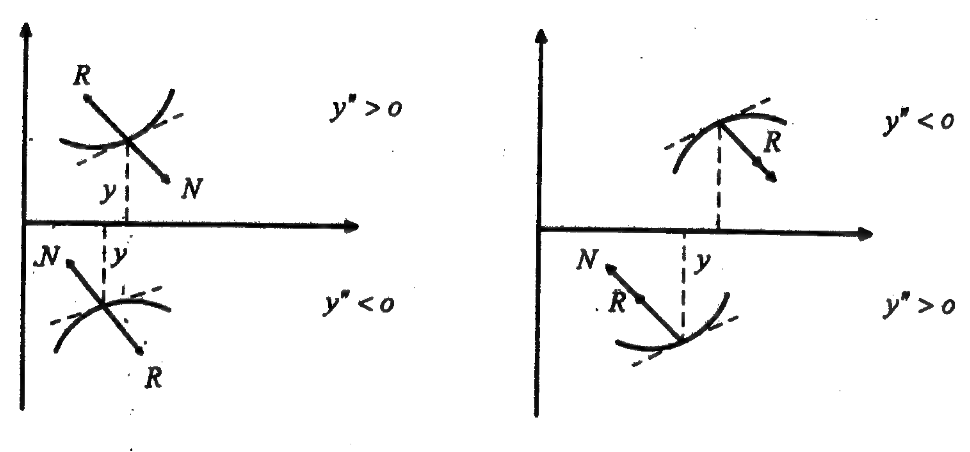
<u>المثال الثاني :-</u>

جد معادلة المنحنى الذي نصف قطر انحنائه عند أي نقطة عليه يساوي

1- طول العمودي وفي اتجاهه عند هذه النقطة

2- طول العمودي وعكس اتجاهه عند هذه النقطة .

الحــل :-



شكل -1-

نعلم أن نصف قطر الانحناء R المنحنى $y = f(x)$ عند نقطة (x, y) عليه يعطـــــي بالعلاقة :-

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}$$

وكما يعطي طول العمودي N من عند نفس النقطة إلى محور x بالعلاقة :

$$N = \left(1 + y'^2\right)^{1/2} |y|$$

وكما يتضح طول من الشكل السابق يكون لنصف قطر الانحناء نفس اتجاه العمـــودي إذا اختلفت إشارتا y, y'' بينما يتضاد اتجاها نصـــف قطـــر الانحنـــاء والعميـــودي إذا تطابقت إشارتا y'', y

1- لكي يكون $R = N$ فان إشارة y يجب أن تختلف عن إشارة y'' وبالتالي :-

$$\frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''} = -y\left(1 + y'^2\right)^{1/2} \Rightarrow yy'' + y'^2 + 1 = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة التفاضلية على الصورة :-

$$\frac{d}{dx}(yy')+1=0 \Rightarrow yy'+x=A_1$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى يمكن حلها بفصل المتغيرات ومنه :-

$$ydy=(A_1-x)dx$$

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}(A_1-x)^2+A_2$$

وهذه طائفة من الدوائر ذات بارامترين مركزها $(A_1,0)$ وأنصـــاف أقطارهـــا $\sqrt{A_2}$ حيث A_2,A_1 ثابتان اختياريان .

<u>**ملاحظـــات**</u> :-

- المعادلة $yy''+y'^2+1=0$ هي معادلة تامة لأنه يمكن الحصول عليها بمفاضلـــة المعادلة $yy'+x=A_1$.
- المعادلة $yy''+y'^2+1=0$ خالية صراحة من المتغير المستقل x وبالتالي يمكن تجربة حلها باستخدام التعويض $y'=\vartheta$ وبالتالي $y''=\vartheta\frac{d\vartheta}{dy}$ حيث يمكن كتابـــة المعادلة $yy''+y'^2+1=0$ على الشكل :-

$$y\vartheta\frac{d\vartheta}{dy}+\vartheta^2+1=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{\vartheta d\vartheta}{\vartheta^2+1}=0$$

$$\ln y+\frac{1}{2}\ln(\vartheta^2+1)=\ln A_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{y}\sqrt{A_2-y^2}$$

وبفصل المتغيرات :

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{A_2-y^2}}=dx \Rightarrow A_2-y^2=(x-A_1)^2$$

حيث A_2, A_1 ثابتان اختياريان .

2- لكي يكون $R=-N$ يجب أن نتطابق إشارتا y'', y وعليه :-

$$\frac{1}{y''}\left(1+y'^2\right)^{3/2}=y\left(1+y'^2\right)^{1/2} \Rightarrow yy''-y'^2-1=0$$

وهذه معادلة تفاضلية خالية من x صراحة وبالتالي يمكن استخدام التعويـض $y'=\vartheta$ ومن ثم $y''=\vartheta.{d\vartheta}/{dy}$ وعليه تصير المعادلة إلي :-

$$y\vartheta\frac{d\vartheta}{dy}-\vartheta^2-1=0$$

بفصل المتغيرات والمكاملة :-

$$\frac{\vartheta d\vartheta}{1+\vartheta^2}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(1+\vartheta^2\right)=\ln+\ln A_1$$

أو
$$1+\vartheta^2=A_1^2y^2 \Rightarrow \vartheta=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{A_1^2y^2-1}$$

بفصل المتغيرات والمكاملة :
$$\frac{dy}{\sqrt{A_1^2y^2-1}}=\pm dx$$

إذن
$$\frac{1}{A_1}\cosh^{-1}(A_1y)=\pm x+A_2$$

$$A_1y=\cosh(\pm A_1x+A_1A_2) \Rightarrow y=\frac{1}{A_1}\cosh(\pm A_1x+A_1A_2)$$

بوضع $B = A_1 A_2 , A = {}^{1}\!/_{A_1}$ نحصل على :-

$$y = A\cosh\left(\pm\frac{x}{A} + B\right)$$

وهذه طائفة من السلاسل (catenaires) ذات بارامترين B, A

VIII.2ـ تطبيقـــات فيزيائيـــة :ـ

المثال الثالث :-

جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث عجلته تساوي ثلاثة أمثال سرعته . فـــإذا كـــان بعده عند لحظة البداية عن نقطة الأصل متر واحد وكانت سرعته الابتدائيـــة $1.5m/s$ فأوجد الزمن الذي يصبح عنده على بعد $10m$ من نقطة الأصل .

الحـــل :-

ليكن بعد الجسم عن نقطة الأصل عند اللحظة t هو x وبالتالي تكون ســـرعته هـــي $\frac{dx}{dt}$ وعجلته $\frac{d^2x}{dt^2}$ عند هذه اللحظة :-

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt}$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية فيها المتغير التابع x والمتغـــير المســـتقل t وهي خالية صراحة من المتغير التابع والمتغـــير المســـتقل . إذن بوضـــع $\vartheta = \frac{dx}{dt}$ ومن ثم $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt}$ تؤول هذه المعادلة إلى :-

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 3\vartheta \Rightarrow \frac{d\vartheta}{\vartheta} = 3dt \Rightarrow \vartheta = A_1 e^{3t}$$

وحيث انه عند $t=0$ كانت $\vartheta = 1.5m/s$ إذن :-

$$1.5 = A_1 e^0 \Rightarrow A_1 = 1.5 \Rightarrow \vartheta = 1.5e^{3t}$$

ولكــن

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = 1.5e^{3t} \Rightarrow dx = 1.5e^{3t}dt \Rightarrow x = \frac{1}{2}e^{3t} + A_2$$

وحيث انه عند $t=0$ كانت $x = 1m$ أذن :-

$$1 = \frac{1}{2}e^{3\times o} + A_2 \Rightarrow A_2 = 0.5$$

إذن

$$x = \frac{1}{2}\left[e^{3t} + 1\right] \Rightarrow 3t = \ln(2x-1)$$

الزمن الذي يصبح عنده الجسم على بعد $10m$ هو :

$$3t = \ln(2\times 10 - 1) \Rightarrow t = 0.9815$$

أي أن الجسم يكون على بعد $10m$من نقطة الأصل بعد حوالي الثانية .

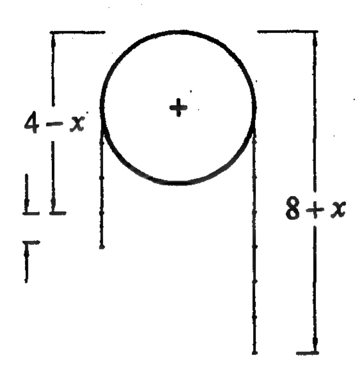
<u>المثال الرابع</u> :-

علقت سلسلة طولها $12m$ على بكرة بحيث يتدلى منها $4m$ مــن ناحيــة و $8m$ مــن الناحية الأخرى . جد الزمن اللازم لانزلاق السلسلة ؟

1- بإهمال الاحتكاك بين السلسلة والبكرة .

2- إذا كان الاحتكاك بين السلسلة والبكرة يساوي $\frac{1}{2}mg$.

الحـــل :-



شكل -2-

لتكن كتلة المتر الواحد من السلسلة هي $m(kg/m)$ تبدأ السلسلة في الانزلاق علـــى البكرة بفعل فارق الطول على جانبي البكرة كما هو مبين فــــي الشـــكل -2- لتكـــن المسافة التي انزلقتها السلسلة بعد زمن t هي x وبالتالي يكون الجزء الأقصر عنـــــد هذه اللحظة $(4-x)$ والجزء الأطول $(8+x)$ وفـــارق طـــول هذيـــن الجزئيـــن وهو $(4+2x)$ يؤثر بقوة $(4+2x)mg$ علي السلسلة إلى اسفل حيث g هــــي عجلـــة الجاذبية الأرضية .

1-بإهمال الاحتكاك وبتطبيق قانون نيوتن للحركة نحصل على :-

$$(4+2x)mg = (12m)\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{6}x = \frac{g}{3}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الثانية ذات معـــاملات ثابتـــة .

الحل المتجانس هو :-

$$x_h(t) = A_1 \cosh\left(\sqrt{g/6}\,t\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{g/6}\,t\right)$$

بينما الحل الخاص يمكن الحصول عليه باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة وذلـك بوضع :

$$x = A_3$$

بالتعويض في المعادلة نجد $A_3 = -2$ إذن يكون الحل الكامل من الشكل :-

$$x(t) = A_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}}\, t\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{6}}\, t\right) - 2$$

و

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{6}}\left[A_1 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right)\right]$$

وحيث أن عند اللحظة $t = 0$ كانت $\frac{dx}{dt} = 0, x = 0$

أذن :

$$o = A_1 - 2 \Rightarrow A_1 = 2$$

$$o = \sqrt{\frac{g}{6}} A_2 \Rightarrow A_2 = 0$$

وعلى ذلك يكون :

$$x(t) = 2\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) - 1\right]$$

وعندما يتم انزلاق السلسلة تكون $x = 4$ ، ويتحدد الزمن اللازم للانزلاق من :-

$$4 = 2\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}} t\right) - 1\right] \Rightarrow t = \sqrt{\frac{6}{g}} \cosh^{-1} 3 = 1.379 \sec$$

2- بأخذ قوة الاحتكاك وهي $\left(\frac{1}{2}mg\right)$ في الحساب تصبح معادلة الحركـــة علـــى الصورة :-

$$(4+2x)mg - \frac{1}{2}mg = (12m)\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{6}x = \frac{7}{24}g$$

والحل بنفس الطريقة يعطي :-

$$x(t) = \frac{7}{4}\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{6}}t\right) - 1\right]$$

والزمن اللازم للانزلاق هو :- $t = \sqrt{\frac{6}{g}}\cosh^{-1}\left(\frac{16}{7}+1\right) = 1.454\sec$

المثال الخامس:-

تعطي المعادلة التفاضلية للجهد الكهربي V عند أي نقطة بين سطحين كرتيـــن لهما نفس المركز نصف قطريهما r_1 , $r_2 > r_1$ يحويان داخلـــها شـــحنه كهربيـــة بالعلاقة :-

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0$$

حيث r بعد النقطة عن المركز المشترك للسطحين . جد الجهد الكهربي عند أي نقطـة إذا كان جهد السطح الداخلي V_1 وجهد السطح الخارجي V_2

الحـــل :-

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dr} = 0$$

هذه معادلة تفاضلية تخلو صراحة من المتغير التابع V .

بوضع $\vartheta = \frac{dV}{dr}$ ومن ثم $\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{d^2V}{dr^2}$ نحصل على .

$$\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{2}{r}\vartheta = 0 \Rightarrow \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{2}{r}dr \Rightarrow \ln \vartheta = -2\ln r + \ln A_1$$

$$\vartheta = \frac{dV}{dr} = \frac{A_1}{r^2} \Rightarrow dV = \frac{A_1}{r^2}dr \Rightarrow V = -\frac{A_1}{r} + A_2$$

بتطبيق الشروط الحدية :-

$$V_1 = \frac{-A_1}{r_1} + A_2 \qquad , \qquad V_2 = \frac{-A_1}{r_2} + A_2$$

بحل هذين المعادلتين نجد أن :- $A_1 = \frac{-r_1 r_2}{r_2 - r_1}(V_1 - V_2)$

$$A_2 = \frac{r_2 V_2 - r_1 V_1}{r_2 - r_1}$$

وبالتعويض في معادلة الجهد نحصل علي الجهد عند أي نقطة $r_1 < r < r_2$ على الصورة :

$$V(r) = \frac{r_1(r_2 - r)V_1 + r_2(r - r_1)V_2}{r(r_2 - r_1)}$$

<u>المثال السادس</u> :-

عندما يتحرك جسم مشحون كتلته $m(kg)$ وشحنته (Coulombs) q تحت تأثير مجال كهربي (E(Volts /meter ومجال مغناطيسي (B (Tesl$a$ فانه يعاني قوة

تسمى بقوة لورنتز (Lorentz Force) وتعطي بالعلاقة :-

$$\vec{F} = g\,\vec{E} + g\,\vec{V} \wedge \vec{B}$$

حيث V هي سرعة الجسم عند أي لحظة t وعلامة ($\wedge$) تشير إلى إن الضرب هو ضرب اتجاهي (Vector Product) .

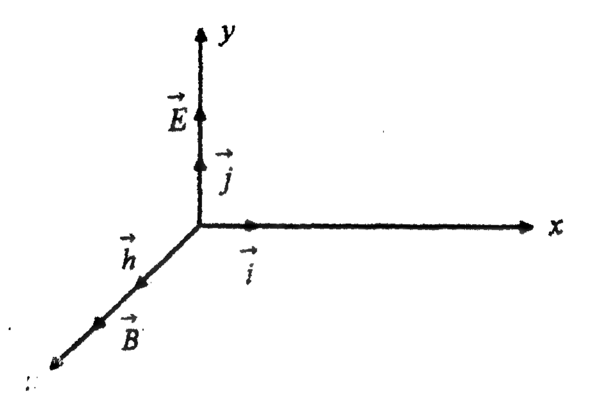
جد المسار الذي يسلكه هذا الجسم إذا بدأ حركته من السكون عند نقطة الأصل في مجالين منتظمين لا يتغيران مع الزمن إحداهما وهو المجال الكهربي مواز لمحور y والآخر هو المجال المغناطيسي مواز لمحور z .

للملاءمة نضع $w = qB/m$, $u = E/B$, $a = u/w = mE/qB^2$

الحل :-

ليكن . $\vec{E} = E\,\vec{j}$, $\vec{B} = B\,\vec{k}$

حيث $\vec{j}, \vec{k}$ متجها وحدة في اتجاه محوري y, z على الترتيب .



شكل -3-

$$\vec{V}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ V_x & V_y & V_z\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}=BV_y\,\vec{i}-BV_x\,\vec{j}$$

إذن
$$\vec{F}=qE\,\vec{j}+qBV_y\,\vec{i}-qBV_x\,\vec{j}=qBV_y\,\vec{i}+q(E-BV_x)\,\vec{j}$$

أي أن القوة المؤثرة على الجسم المشحون تقع في المستوي xy . وبالتـالي فالحركـة محصورة في هذه المستوي لان الجسم يبدأ حركته من السكون فرضاً . بتطبيق قـانون نيوتن للحركة في الاتجاهين y,x نحصل على :-

$$m\frac{dV_x}{dt}=BV_y \qquad , \qquad m\frac{dV_y}{dt}=(E-BV_x)$$

أو
$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{B}{m}V_y \qquad , \qquad \frac{dV_y}{dt}=\frac{B}{m}\frac{E}{B}-\frac{B}{m}V_x$$

أو
$$\frac{dV_x}{dt}=wV_y \qquad (1) \qquad , \qquad \frac{dV_y}{dt}=wu-wV_x \qquad (2)$$

نحل المعادلتين الآنيتين في V_y , V_x بمفاضلة الثانية بالنسبة للزمن والتعويض عـن $\frac{dv}{dt}$ من الأولى نحصل على :-

$$\frac{d^2V_y}{dt^2}+w^2V_y=0$$

وهذه معادلة متجانسة حلها هو :-
$$V_y=A_1\cos wt+A_2\sin wt$$

وحيث أن عند $t = 0$ يكون $V_y = 0$ إذن $A_1 = 0$

ومن المعادلة الثانية عند $t = 0$ يكون $\frac{dV_y}{dt} = wu$ إذن $A_2 = U$

إذن $$V_y = U \sin wt \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن : . $\frac{dV_x}{dt} = wu \sin wt$

إذن $$V_x = -u \cos wt + A_3$$

حيث إن عند $t = 0$ يكون $V_x = 0$ فإن $A_3 = 0$

إذن $$V_x = u(1 - \cos wt) \qquad (4)$$

بمكاملة (3), (4) نحصل على y, x :-

$$y = \int V_y dt = -\frac{u}{w} \cos wt + A_4$$

إذن $$y = 0, at \quad t = 0 \Rightarrow A_4 = +\frac{u}{w} = Q$$

إذن $$y = Q(1 - \cos wt) \qquad (5)$$

$$x = \int V_x dt = ut - \frac{u}{w} \sin wt + A_5$$

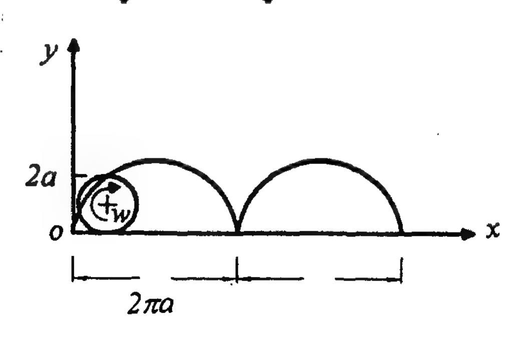
إذن : $$x = 0 \quad at \quad t = 0 \Rightarrow A_5 = 0$$

$$x = Q(wt - sinwt) \qquad (6)$$

وتعطي المعادلتان $(5),(6)$ والمعادلات البارامترية للمسار :

$$x = Q(wt - \sin wt)$$
$$y = Q(1 - \cos wt)$$

وهاتان المعادلتان هما المعادلتان البارامتريتان للمنحنـــى الدويــري (cycloid) وهو مسار نقطة على محيط دائرة نصف قطرها Q تتدحرج دون انـــزلاق بســرعة زاوية w على محور x كما هو مبين في الشكل التالي :-



شكل -4-

<u>المثال السابع</u> :-

جسم متحرك كتلته m ينجذب صوب نقطة ثابتة 0 بقوة تتناسب عكسيا ومربــع بعده عنها .

اثبت إن الجسم يتحرك على مسار مخروطي (conic Path) بؤرته النقطة الثابتة .

للسهولة استخدام الإحداثيات القطبية .

الحــل :-

$F = k^2 \frac{m}{r}$

$r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}$ ، $\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2$ ، $r\dot{\vartheta}$ ، $\dot{r}$ ، m ، r ، ϑ

العجلة السرعة الموضع

شكل -5-

لتكن القوة المؤثرة على الجسم عند أي موضع هي $\frac{k^2m}{r^2}$ صوب النقطـــة الثابتـــة 0 حيث k ثابت .

بتطبيق قانون نيوتن في الاتجاه النصف قطري والمتعامد نحصل على :-

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-\frac{k^2m}{r^2} \quad , \quad m\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\right]=0$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{k^2}{r^2} \qquad (i) \quad , \quad r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}.\frac{d\vartheta}{dt}=0 \qquad \text{(ii)}$$

من (ii) نري أن :-

$$r\frac{d^2r}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}.\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right]=0 \Rightarrow r^2\frac{d\vartheta}{dt}=A_1 \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{A_1}{r^2} \qquad (iii)$$

بالتعويض في المعادلة (i) نحصل على :-

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{A_1^2}{r^3}=-\frac{k^2}{r^2} \qquad \text{(iv)}$$

ولتخلص من r في المقام نستخدم التعويض $e=\frac{1}{r}$ ثم نحذف t بين $(iv),(iii)$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{de}.\frac{de}{dt}=\frac{dr}{de}.\frac{de}{r\vartheta}.\frac{d\vartheta}{dt}=\left(-\frac{1}{e^2}\right)\frac{de}{d\vartheta}\left(A_1e^2\right)=-A_1\frac{de}{d\vartheta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(-A_1\frac{de}{d\vartheta}\right)=\frac{d}{d\vartheta}\left(-A_1\frac{de}{d\vartheta}\right).\frac{d\vartheta}{dt}=A_1^2e^2\frac{d^2e}{d^2\vartheta}$$

بالتعويض في (iv) نحصل على العلاقة التفاضلية بين ϑ, e على الصورة :-

$$\frac{d^2 e}{d\vartheta^2} + e = \frac{k_2}{A_1^2} \qquad (v)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة حلـــها المتجـــانس هو:-

$$e_h(\vartheta) = A_2 \cos(\vartheta + \vartheta_0)$$

حيث ϑ_0, A_2 ثابتان اختياريان والحل الخاص هو $e_p = k^2 / A_1^2$

ويكون الحل الكامل هو :-

$$e(\vartheta) = A_2 \cos(\vartheta + \vartheta_0) + \frac{k^2}{A_1^2}$$

أو

$$r = \frac{1}{A_2 \cos(\vartheta + \vartheta_0) + k^2 / A_1^2} \qquad (vi)$$

بوضع $\varepsilon^2 = A_2^2 A_1^4 / k^4, l = A_1^2 / k^2$ نأخذ معادلة المسار (vi) الصورة :

$$r(\theta) = \frac{\ell}{1 \pm \varepsilon \cos(\vartheta + \vartheta_0)}$$

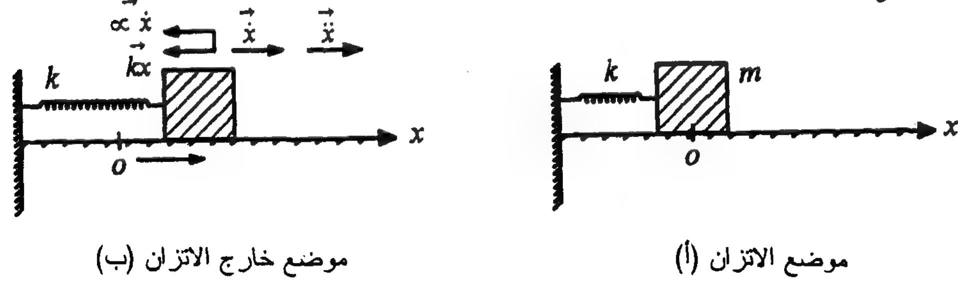
وهذه هي المعادلة القطبية لمخروطي بؤرته النقطة الثابتة 0.

المثال الثامن :-

ناقش بالتفصيل الحركة المستوية لزنبرك (spring) ثابت مرونته k أحد طرفيه مثبت والطرف الأخر مربوط به جسم كتلته $m\ [kg]$. والجسم حر الحركة في مستوي أفقي تحت تأثير مقاومة تتناسب مع سرعته .

ما هو الشبيه الكهربائي لهذه المنظومة .

الحل :-



موضع خارج الاتزان (ب) موضع الاتزان (أ)

شكل -6-

يبين الشكل (أ) وضع الاتزان للجملة المتحركة المتكونة من النابض والكتلة m. نعتبر الحركة في اتجاه محور x حيث وضع الاتزان هو ونقطة الأصل .

أزح الجسم m بعيدا عن وضع الاتزان وتركت الجملة حرة الحركة بعد ذلك . يبين الشكل (ب) الوضع اللحظي عندما يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب لمحور x مسافة x من وضع الاتزان 0 ، حيث يؤثر عليه في اتجاه معاكس لحركته :

قوة النابض kx التي تتناسب مع الاستطالة x حيث k ثابت مرونته .

قوة مقاومة $\propto \frac{dx}{dt}$ تتناسب وسرعة الجسم $\frac{dx}{dt}$ حيث $\propto$ وهي مقاومة التخميد للحركة . وعلى ذلك تكون معادلة الحركة هي :-

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \propto \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

وإذا اعتبرنا $\propto, k$ ثوابت لا تعتمد على x أو t تكون معادلة الحركة معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة وهي في حالة الحركة الحرة معادلة متجانسة.

المعادلة المميزة :-

$$ms^2 + \propto s + k = 0$$

حيث استخدمنا الرمز x بدلا من m, لان الأخيرة تمثل الكتلة هنا . وجذرا المعادلة المميزة هما :-

$$S_{1,2} = \frac{\propto}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\propto}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

وللملاءمة نضع :- $\lambda = \propto / 2m \quad , \; w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \; B = \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$

وعلى ذلك يكون الجذران هما :

$$s_1 = -\lambda + B, s_2 = -\lambda - B$$

وتتوقف طبيعة الحل على الطبيعة المميز : $\Delta = B^2 = \left(\frac{\propto}{2m}\right)^2 - k/m$

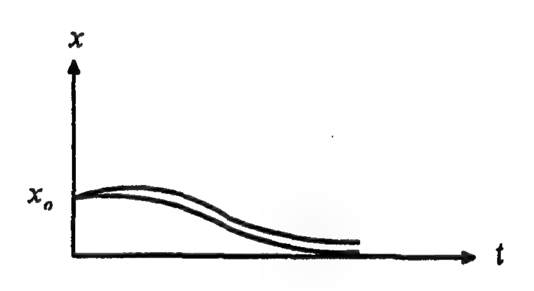
<u>أولاً : المميز موجب :-</u>

$$\Delta = B^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{\propto}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \Rightarrow \propto > \sqrt{4mk}$$

ويتحقق ذلك في حالة كون مقاومة الحركة كبيرة . وفي هذه الحالة يكون للمعادلة المميزة جذران حقيقيان مختلفان سالبان $s_1 = -\lambda + B$ و $s_2 = -\lambda - B$ حيث $\propto > B$ وعلى ذلك :-

$$x = e^{-\lambda t}\left[Ae^{Bt} + Ce^{-Bt}\right]$$

ويبين الشكل التالي سلوك x في حالة وجود مقاومة كبيرة للحركة والتي تعرف بحالة التخميد الزائد (over Damping)



شكل – 7 –

عند $t=0$: $x=x_0=A+C$

عندما $t\to\infty$ فان $x\to 0$

أي أن الجسم يمكن إن يمر بوضع اتزانه مرة واحدة قبل إن يستقر عنده

ثانياً :– المميز منعدم :–

$$\Delta=B^2=0\Rightarrow\left(\frac{\propto}{2m}\right)^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\propto=\sqrt{4mk}=\propto_c$$

في هذه الحالة يكون للمعادلة المميزة جذران حقيقيان سالبان ومتساويان (جذر مزدوج)

$$s=-\lambda=-\propto/2m$$

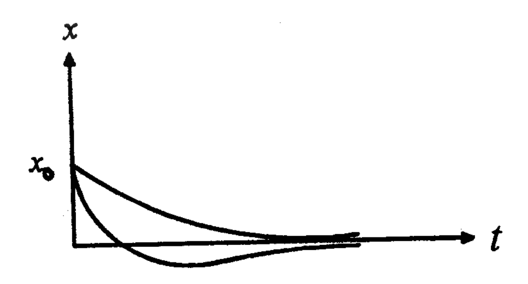
ويكون :

$$x=e^{-\lambda t}(At+C)$$

وواضح أيضا من هذه المعادلة الأخيرة انه إذا بدأ الجسم في التحرك من عند مسافة اختيارية $x_0 = C$ فانه سيقرب مع مرور الزمن من موضع اتزانه $x = 0$. والشكل العام للحركة مشابه لحالة التخميد الزائد وتعرف هذه الحالة بحالة التخميد الحرج (Critical Damping) حيث تكفي المقاومة $\propto=\propto_c$ لمنع تذبذب الحركة .
وتعرف قيمة المقاومة $\propto_c$ بالمقاومة الحرجة (Critical Resistance)

ملحوظة :-

قد يعبر الجسم موضع اتزانه لمرة واحدة فقط عند زمن $t' = -A/C$ إذا سمحت ظروف المسالة باختلاف C, A في الإشارة .



شكل – 8 –

ثالثاً :- المميز سالب :

$$\Delta = B^2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{\propto}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \Rightarrow \propto < \sqrt{4km}$$

وتتحقق هذه الحالة إذا ما قلت مقاومة الحركة إلى ما دون قيمتها الحرجة ويكون للمعادلة المميزة جذران مركبان مترافقان جزءاهما الحقيقيان متساويان وسالبان وللملاءمة نضع :-

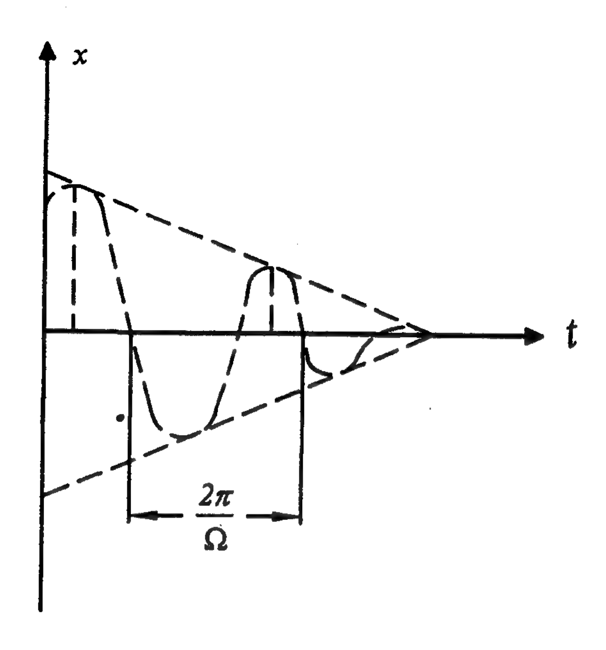
$$B^2 = -\Omega^2 \Rightarrow B = \pm i\Omega \quad , \; \Omega = \sqrt{k/m - (\propto/2m)^2} = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

وبالتالي يكون جذر المعادلة المميزة هما $s_{1,2} = -\lambda \pm i\Omega$

ويكون الحل :-

$$x = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \phi_0)$$

حيث ϕ_0 , A ثابتان اختياريان يتحددان من طرف بدء الحركة . وواضح أن الحركة هنا حركة تذبذبية (Oscillatory Motion) ترددها الزاوي Ω والذي يسمى بالتردد الطبيعي (Natural Damped Frequency) . لكن سعة (Amptitude) هذه الحركة التذبذبية يتضاءل باستمرار مع مرور الزمن طبقاً للعلاقة $Ae^{-\lambda t}$. وتسمى الثابت الموجب λ بثابت التخميد أو معامل التخميد (Damping Constant)



شكل -9-

بين الشكل المقابل هذه الحركة التذبذبية حيث تبدأ بقيمـــــة اختياريـــة $x_0 = A\cos\varphi_0$ وتنتهي بالصفر حالما الجسم في موضع الاتزان عند $t = \infty$.

ولكن في طريقه للاستقرار يمر بموضع الاتزان مرات عديدة بين كل مـــرور واخـــر يتضاءل بعد الجسم عند موضع اتزانه . وتعرف الحالة التذبذبية بحالة التخميد الناقص (Under Damping)

ملاحظـــة:-

من المعادلة السابقة نحصل على : -

$$\frac{dx}{dt} = -\Omega A e^{-\lambda t}\sin(\Omega t + \varphi_0) - \lambda A e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = -Ae^{-\lambda t}\left[\lambda\cos(\Omega t + \varphi_0) + \Omega\sin(\Omega t + \varphi_0)\right] = A' e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi_0')$$

حيث $A' = A\sqrt{\lambda^2 + \Omega^2} = w_0^2 A$ and $\varphi_0' = \varphi_0 - \tan^{-1}\frac{\Omega}{\lambda} - \lambda$

أي إن سرعة الجسم هي أيضا كمية تذبذبية مخمدة لها نفس التردد الزاوي Ω ، ونفس ثابت التخميد λ . ويلاحظ أن القيم العظمى المتتالية في نفس الاتجاه للبعد x تتباعد على فترات زمنية متساوية طول كل فترة هو $T_d = \frac{2\pi}{\Omega}$ وهو الزمن الـــدوري (Periodic time) للحركة التذبذبية .

ويجب التأكد على أن منحنى x ليس منحنى جيبيا خالصا بسبب وجود العامل الآســـي $e^{-\lambda t}$. فمثلا الفترة الزمنية بين قيمة عظمى وقيمة صفرية تليها مباشـــرة لا تســـاوي نصف دورة بالضبط . ولقياس معدل تناقص القيم العظمى نعرف :

Numerical Decrement N.D *** التناقص العددي :-**

هو الفرق بين قيمتين عظميين (موجبتين) متتاليتين مقسوماً على القيمة العظمى الأكبر أي أن :-

$$N.D = {(x_n - x_{n-1})}/{x_n} = 1 - e^{\lambda T_d}$$

حيث n دليل سفلي نعد به القيم العظمي (الموجبة)

Logarithmic Decrement L.D *** التناقص اللوغرتمي :**

هو لوغرتم النسبة بين قيمة عظمى (موجبة) والقيمة العظمى الموجبة التي تليها مباشرة

$$L.D = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln e^{\lambda T_d} = \lambda T_d = 2\pi\lambda / \Omega$$

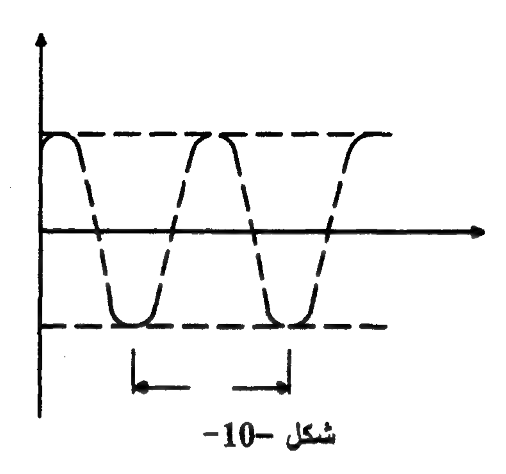
هذا يعنى أن القيم العظمى الموجبة x_3, x_2, x_1 تكون متوالية هندسية أساسها $e^{\lambda T_d}$

<u>رابعاً : المميز تخيلي خالص</u>:-

$$R(\Delta) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \Omega_d = w_0$$

وهذه هي الحالة التي تنعدم فيها مقاومة الحركة وبالتالي تصبح الحركة حركة تذبذبية غير مخمدة (Undamped Oscillatory Motion) بتردد زاوي $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ، يُعرف بالتردد الطبيعي غير المخمد وسعة الحركة ثابتة A تعتمد على ظروف بدء الحركة

$$x = A\cos(w_0 t + \varphi_0)$$



شكل -10-

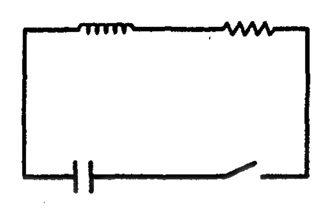
الشبيه الكهربائي للجملة الميكانيكية :- Electrical Analog

الشبيه الكهربائي للجملة الميكانيكية المبينة في الشكل (أ) والشكل (ب) هو الدائرة الكهربائي المبينة في الشكل التالي والمكونة من ملف $L[Henry]$ على التوالي مع سعة $C[Farad]$ ومقاومة كهربائية $R[ohm]$. فإذا افترضنا أننا حفزنا هذه الدائرة بوضع شحنة ابتدائية q_0 على المكثف C فان هذه الشحنة تأخذ في التسرب عبر الدائرة من اللوح الموجب إلى اللوح السالب للمكثف وينشأ على ذلك تيار كهربائي i بتطبيق قانون كيرشوف للجهد حول الدائرة نحصل على :-

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=0$$

وبالمفاضلة مرة أخرى نجد :

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0$$



شكل - 11 -

وهذه هي المعادلة التفاضلية للتيار الكهربائي وهي شبيه بالمعادلة التفاضلية للجملة الميكانيكية ، ويلاحظ أن الملف L شبيه الكتلة m ، والمقاومة الكهربائية R شبيه المقاومة الميكانيكية α ، والسعة الكهربائية C شبيه مقلوب ثابت مرونته النابض $1/k$

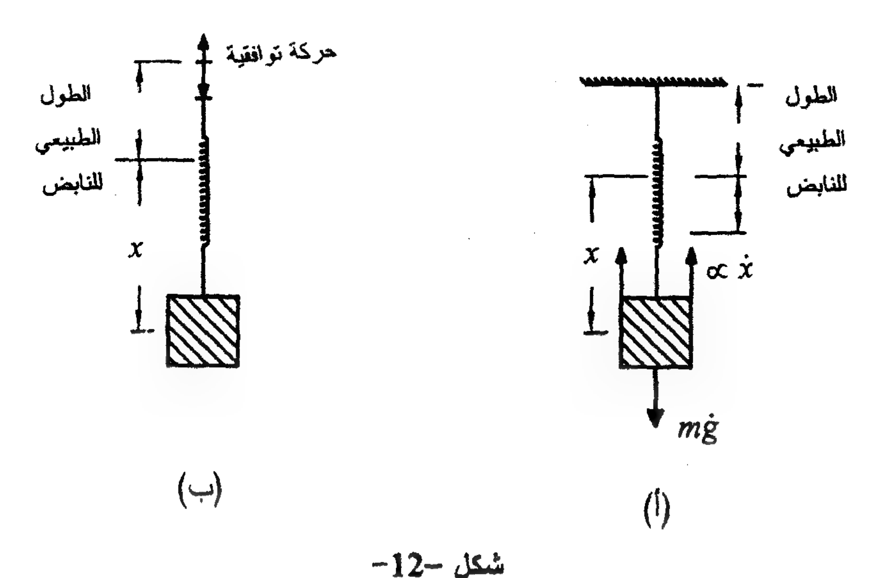
وحل المعادلة التفاضلية السابقة شبيه بحل المعادلة التفاضلية الميكانيكية في حالتها الأربع التي فصلناها فيما سبق .

المثال التاسع :-

نابض ثابت مرونته $k = 392\, N/m$ مثبت من نهايته العليا ، ومعلق في نهايته السفلي جسم كتلته $8kg$ فإذا كانت مقاومة الحركة هي $16\, N/ms$ وعجلته الجاذبية هي $9.81\, m/s^2$

1- إذا سحب الجسم مسافة $5cm$ اسفل موضع اتزانه ثم أطلق للتحرك من السكون فاثبت أن الجسم يتحرك حركة تذبذبية . جد معادلة الحركة والزمن الدوري والتناقص اللوغرتمي لها .

2- كما في (1) ولكن إذا أعطى الطرف الأعلى للنابض الحركة التوافقية $y = 0.2\cos 7t$ في اتجاه النابض .



شكل -12-

الحــل :

1- عندما تعلق الكتلة $8kg$ في النابض فانه في حالة الاتزان يستطيل مسافة x حيث :

$$kx = mg \Rightarrow x = \frac{8 \times 9.8}{392} = 0.2m$$

ليكن موضع الجسم هو x من نهاية الطول الطبيعي للنابض حيث الاتجـــاه الموجـب مقاساً لاسفل كما في الشكل (أ) وعلى ذلك تكون معادلة الحركة هي :-

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - \propto \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\propto}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = g \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 49x = 9.8$$

المعادلة المتجانسة هي :- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 49x = 0$

المعادلة المميـــزة هي :- $m^2 + 2m + 49 = 0$

جـــذراهـــــا همـــــا :- $m_{1,2} = -1 \pm i4\sqrt{3}$

ويكون الحل المتجانس كالتالي :

$$x_h = Ae^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right)$$

حيث φ_0, A ثابتان اختياريان .

والحل الخاص هو : $x_p = 0.2$

ويكون الحل الكامل هو :

$$x(t) = Ae^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right) + 0.2$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ae^{-t}\left[4\sqrt{3}\sin\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right) + \cos\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right)\right]$$

بدأ الجسم التحرك من السكون عند مسافة $x_0 = 0.05 + x = 0.25m$

إذن $0.25 = A\cos\varphi_0 + 0.2$

و $0 = 4\sqrt{3}\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0$

أي أن $\varphi_0 = 2.998 rad = 171.787^0$ *and* $A = -0.05m$

إذن $x = -0.05e^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + 2.998\right) + 0.2$

وهذه حركة تذبذبية مخمدة ، ترددها الطبيعـــي المخمـــد $\Omega = 4\sqrt{3} rad/s$ وثـــابت تخميدها $\lambda = 1$ وزمنها الدوري $Td = \frac{2\overline{\Lambda}}{\Omega} = 09s$ والتنـــاقص اللوغرتمـــي لـــها هو $\lambda T_d = 0.9$. وبالتالي فالنسبة بين ســعتين موجبتيــن متتاليتـــان للحركـــة هـــي $e^{\lambda T_d} = 0.4$ وحيث ان أول سعة هي $0.05m$ أذن فثاني سعة موجبة للذبذبة هـــي $0.02m$.

ونلاحظ من عبارة $x(t)$ أن الإزاحة تتكون من مركبتين : المركبة الأولى هي حركة تذبذبية مخمدة تتضاءل ثم تتلاشى بمرور الزمن وتسمى هذه المركبة بالمركبة العابرة (Transient camponent) أو المركبة الطبيعية . وهـــي تعتمـد أصـــلاً علـــى خصائص الجملة المتحركة وعلى أحوال البداية ولا تعتمد علـــى القـــوة الحـــافزة إلا لحفزها أو أبدأها فقط . والمركبة الثانية هي 0.2 وهي تعتمد على القوة الحافزة ومـــن طبيعتها ، حيث القوة الحافزة هنا هي الوزن $8kg$ المعلق في النابض وتســـمى هـــذه المركبة بالمركبة أو بالمركبة المستقرة (Steady Component) لأنها هي التي تدوم بدوام القوة الحافزة أو بالمركبة القسرية (Forced Component) لأنها تفرض قسراً على الجملة بفعل القوة الحافزة .

2- عندما يتحرك الطرف الأعلى للنابض حركة توافقيـــة بســيطة $y = 0.2\cos 7t$
فان معادلة الحركة تصبح :-

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x-y) - \propto \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt} + 2\frac{dx}{dt^2} + 4gx = 9.8 + 9.8\cos 7t$$

والمعادلة المتجانسة هي نفسها كما في الجزء (i) وعليه :-

$$x_h = Ae^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right)$$

أما الحل الخاص يمكن الحصول عليه باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة :-

$$x_p = 0.2 + 0.7\sin 7t$$

ويكون الحل الكامل هو :-

$$x(t) = Ae^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right) + 0.2 + 0.7\sin 7t$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ae^{-t}\left[4\sqrt{3}\sin\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right) + \cos(4\sqrt{3}t + \varphi_0)\right] + 4.9\cos 7t$$

وحيث عند $t = 0$ نكون $x = 0.05 + y = 0.45$ and $\frac{dx}{dt} = 0$

إذن : $0.45 = A\cos\varphi_0 + 0.2$

و $0 = -A\left[4\sqrt{3}\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\right] + 4.9$

ومن هاتين المعادلتين نجد أن : $\varphi_0 = 1.214\ \text{rad}, A = 0.716$

وعليه يكون :

$$x = 0.716e^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + 1.214\right) + 0.7\sin 7t + 0.2$$

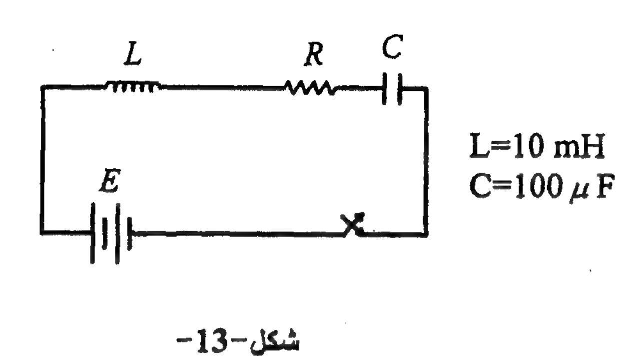
والحد الأول يتخامد مع مرور الزمن ويتلاشى وهو يكون المركبة العـــابرة للحركـــة بينما الحد التوسط والحد الأخير يكونان المركبة المستقرة للحركة حيث الحد الأخـــير يمثل إزاحة ثابتة نتيجة الوزن ، بينما الحد الأوسط يمثل إزاحة مترددة بنفس تـــردد الحركة التوافقية المفروضة قسراً على الطرف الأعلى للنابض .

3ـ تطبيقـــات كهربائيـــة :ـ Electrical Applications

المثال العاشر :-

في الدائرة الكهربائية المبينة في الشكل التالي ، ظل المفتاح مفتوحاً لمدة طويلة ثم قفـل فجأة عند $t = 0$. جد معادلة التيار كدالة زمنية . ما هو اقل زمن يكون عنده التيـــار قيمة عظمى وما هي هذه القيمة العظمى ؟ أعط المقاومة للقيم التالية :

أولاً : $R = 20\sqrt{2}\Omega$ **ثانياً :** $R = 20\Omega$ **ثالثاً :** $R = 12\Omega$ **رابعاً :** $R = 0$



شكل-13-

الحـــل :-

نفرض أن التيار عند أي لحظة t بعد قفل المفتاح هو i . بتطبيق قـــانون كيرشـــوف للجهد حول مسار الدائرة نجد :-

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=E$$

بمفاضلة الطرفين والقسمة على L نحصل على : $\frac{d^2i}{dt}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0$

حيث أن المفتاح ظل مفتوحا لمدة طويلة فتكون الدائرة في حالة استقرار قبل قفل المفتاح مباشرة ويظل كذلك لحظيا بعد قفل المفتاح بسبب وجود الملف L الذي يمنع التغير المفاجئ في التيار . ولتحقق ذلك يقوم الملف L بتحمل كل القوة الدافعة الكهربائية E لحظيا بعد قفل المفتاح . لكن بعد ذلك يأخذ التيار في النمو وتبدأ القوة الدافعة الكهربائية في التوزع على عناصر الدائرة الأخرى C,R . وفي النهاية حيث تصل الدائرة إلى حالة الاستقرار يكون المكثف C قد شحن وينعدم التيار وتظهر كل القوة الدافعة الكهربائية E بين طرفي المكثف . وما بين قيمته الصفرية الأولى وقيمته الصفرية النهائية قد يكون التيار تذبذبيا او غير تذبذبي حسب قيمة المقاومة .

والشروط الابتدائية هي عند $t=0$ فان : $\frac{di}{dt}=\frac{E}{L}=5\times10^3$, $i=0$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية السابقة هي : $m^2+\frac{R}{L}m+\frac{1}{LC}=0$

$$m_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \quad , \qquad \Delta=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}$$

أولاً :- $R=20\sqrt{2}\Omega$

$$\frac{R}{2L}=\sqrt{2}\times10^3 \quad ,and \ \frac{1}{LC}=10^6 \Rightarrow \Delta=10^6>0$$

أي أن المميز موجب وهذه هي حالة التخميد الزائد ويكون الجذران حقيقين متمـــايزين وبالتالي يكون التيار :-

$$i(t) = e^{-\sqrt{2}\times 10^3 t}\left[A\cosh 10^3 t + B\sinh 10^3 t\right]$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن :- $A = 0 \quad , \; B = 5$

وعليه يكون التيار :- $i(t) = 5e^{-10^3\sqrt{2}t}\sinh 10^3 t$

واضح أن التيار ينمو بدء من الصفر حتى يصل لقيمته العظمى وبعدها يناقص تدريجا إلى الصفر . ونلاحظ أن :-

$$\frac{di}{dt} = +5\times 10^3 e^{-10^3\sqrt{2}t}\left[\cosh 10^3 t - \sqrt{2}\sinh 10^3 t\right]$$

$$\frac{di}{dt}\Big|_{tm} = 0 \Rightarrow t_m = 10^{-3}\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.88\times 10^{-3}\,s.$$

وتكون قيمة التيار العظمى المقابلة هي :- $i_m = 5e^{-10^3 tm}\sinh 10^{-3} t_m = 1.437A$

ثانياً :- $R = 20\Omega$

$$\frac{R}{2L}10^3 \quad , \frac{1}{lC} = 10^6 \Rightarrow \Delta = 0$$

أي أن المميز منعدم وهذه هي حالة التخميد الحرج (Critical Damping)

ويكون الجذران متساويين $m_1 = m_2 = -10^3$

وبالتالي يكون التيار هو :-

$$i = e^{-1000t}(At + B)$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن $B = 0$, $A = 5\times 10^3$ وبالتالي :-

$$i(t) = 5\times 10^3 te^{-100t}$$

وواضح من هذه المعادلة أن التيار يصل قيمته العظمى عندما $1-10^3 t_m = 0$

أي عند اللحظة $t_m = 10^{-3} s$ والقيمة العظمى المقابلة هي :-

$$i_m = 5\times10^3\left(10^{-3}\right)e^{-1} = 1.8394A$$

ثالثاً :- $R = 12\Omega$

$$\frac{R}{2L} = 0.6\times10^3 \quad , \frac{1}{LC} = 10^6 \Rightarrow \Delta = -0.64\times10^6 < 0$$

أي أن المميز سالب وهذه حالة التخميد الناقص (under Damping)

ويكون الجذران مركبين ومترافقين

$$m_{1,2} = -600 \pm i800$$

وبالتالي يكون التيار :-

$$i(t) = e^{-600t}\left[A\cos 800t + B\sin 800t\right]$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن :- $A = 0 \quad , B = 6.25$

و

$$i(t) = 6.25e^{-600t}\sin 800t$$

وهذا تيار تذبذبي مخمدة تردده الطبيعي المخمد $\Omega = 800rd/s$ وزمنه الدوري $T_d = 7.8\times10^{-3} s$ وثابت تخميده $\lambda = 600$. وأول قيمة عظمى له تحدث عند t_m حيث أن :-

$$\frac{di}{dt} = Be^{-600t}\left[800\cos 800t - 600\sin 800t\right]$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{tm} = 0 \Rightarrow t_m = 1.159\times10^{-3} s$$

والقيمة العظمى المقابلة هي :-

$$i_m = 6.25e^{-600t_m}\sin(800t_m) = 2.494A$$

ولأخذ فكرة عن سرعة تناقص التيار نحسب التناقص اللوغرتمي

$$L.D = \lambda T_d = 4.7124$$

مما يعنى أن ثاني قيمة عظمى (موجبة) للتيار هي :-

$$i_{m(2)} = e^{-\lambda T_D} i_{m(1)} = 0.0224A$$

رابعاً :- $R = 0$

في هذه الحالة يكون المميز تخيليا صرفا ويكون الجذران تخيليين مترافقين $m_{1,2} = \pm i10^{-3}$ ويكون التيار هو :-

$$i(t) = A\cos 10^3 t + B\sin 10^3 t$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد أن :-

$$A = 0 \quad , B = 5$$

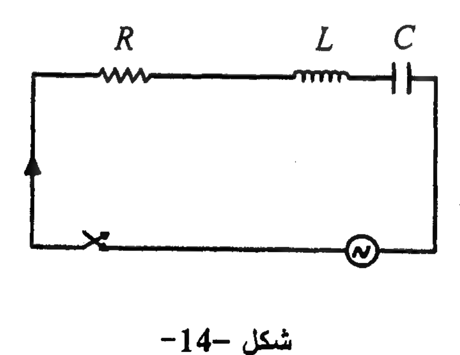
وعليه $i(t) = 5\sin 10^3 t$

وهذا تيار تذبذبي غير مخمد تردده $\Omega = 10^3 rd/s$ وزمنه الدوري $T_0 = 6.28ms$ وسعته $5A$ ثابتة غير متناقصة و أول قيمة عظمى تحدث بعد ربع ذبذبة أي عند $t_m = 1.57ms$.

المثال الحادي عشر : -

في دائرة التوالي RLC المبينة في الشكل التالي القوة الدافعة المسلطة تعطي بالعلاقة $e(t) = E\cos wt$. اكتب الصورة العامة للمركبة العابرة للتيار المار في

الدائرة . جد المركبة المستقرة للتيار . ما هو التيار الكلي ؟ وكيـف تتحـدد ثوابـت المركبة العابرة ؟ ناقش الحالة التي يكون فيها تردد القوة الدافعة الكهربائية المسـلطة مساويا للتردد الطبيعي غير المخمد للدائرة معتبرا حالتين الأولى الدائرة لها مقاومـة والثانية الدائرة خالية من المقاومة .



شكل -14-

الحـل :-

المعادلة التفاضلية للتيار المار في الدائرة هي :-

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int idt = ect$$

بالمفضلة والقسمة على ما نحصل على :-

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = -\frac{wE}{L}\sin wt$$

1- المركبة العابرة للتيار هي التيار الذي لا يعتمد على نوع القوة الحافزة بل يعتمـد على ثوابت الدائرة فقط R, L, C أي أنها هي الحل المتجـانس للمعادلـة التفاضليـة السابقة أي :-

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{Lc} = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية معادلتها المميزة لها جذران هما

$m_{1,2} = -\lambda \pm \Omega j$ حيث :

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \quad ,\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}, w_0^2 = \frac{1}{LC}$$

وسنفرض أن $w_0^2 > \lambda^2$ وعلى ذلك يكون التيار العابر هو :-

$$i_h(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(w_0 t + \varphi_0)$$

حيث φ_0, A ثابتان اختياريان .

2- المركبة المستقرة للتيار هي التيار الذي يدوم مع انقضاء الزمن ، وهو التيار الذي تدفعه القوة الدافعة الكهربائية قسرا على المرور في الدائرة ، والمركبة المستقرة هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الأصلية ، ويمكن الحصول عليه باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة وعليه :-

$$i_P(t) = A_1 \cos wt + A_2 \sin wt$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل :-

$$A_1 = \frac{RE}{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wc}\right)^2} \quad , \quad A_2 = \frac{(wL - 1/wc)E}{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wc}\right)^2}$$

بوضع : $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{R} \quad , \quad x = wL - \frac{1}{wc} \quad , \quad Z = \sqrt{R^2 + x^2}$

يصبح الحل الخاص من الشكل :-

$$i_P(t) = \frac{E}{Z}\cos(wt - \theta)$$

ونلاحظ أن المركبة المستقرة للتيار توافقية أيضاً وترددها الزاوي w هو نفس تـــردد القوة الدافعة الكهربائية المسلطة على الدائرة ، لكن سعة القوة الدافعة الكهربائيـــة E وسعة التيار هي E/Z حيث Z نعرف بمعاوقة الدائرة (Impedance).

ويتخلف التيار في الطور عن القوة الدافعة الكهربائية بزاوية θ التي تسمى زاويـــة الطور (Phase Angle).

وواضح أن المعاوقة هي Z النسبة بين سعتي الجهد المسلط والتيار الناتج لـــذا فـــهي تقاس بوحدات المقاومة الكهربائية وهي الاوم $(ohm\Omega)$ كمـــا تســـمى الكميـــة $x = wL - \frac{1}{wc}$ بمفاعلة الدائرة (Reactance) وهي تقاس أيضاً بالاوم . وعـــادة تعرف المعاوقة المركبة (Complex Impedance) كما يلي :-

$$Z = R + ix = \sqrt{R^2 + x^2}\, e^{i \tan^{-1} \frac{x}{R}}$$

والتيار الكلي هو مجموع المركبة العابرة والمركبة والمستقرة :-

$$i(t) = i_h(t) + i_P(t)$$
$$= Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{E}{Z}\cos(wt - 0)$$

ومرة أخرى نلاحظ أن المركبة العابرة تذبذبية مخمدة ترددهـــا Ω ومصيرهـــا إلـــى الزوال بسبب العامل الآسي $e^{-\lambda t}$ بينما المركبة المستقرة دائمة وسعتها ثابتة وترددها يساوي تردد الجهد المسلط .

3- يتعين الثابتان الاختياريان φ_0, A في عبارة التيار الكلي من الشروط الابتدائيـــة عادة بمعرفة i و $\frac{di}{dt}$ عن $t = 0$ على سبيل المثال .

4- نعتبر الحالة التي فيها يكون تردد المسلط ϖ مساويا للتردد الطبيعي غير المخمـــد w_o والتي تعرف بحالة الرنين (Resonance)

$$w = w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow w^2 LC = 1 \Rightarrow wL - \frac{1}{wc} = 0$$

أو
$$X = w_0 L - \frac{1}{w_0 c} = 0$$

الحالة الأولى : $R \neq 0$

في هذه الحالة تكون المعاوقة اقل ما يمكن وتساوي R وتنعدم زاوية الطور θ وتكون المركبة المستقرة اكبر يمكن ولها نفس طور القوة الدافعة الكهربائية المسلطة. يكون التيار الكلي هو :

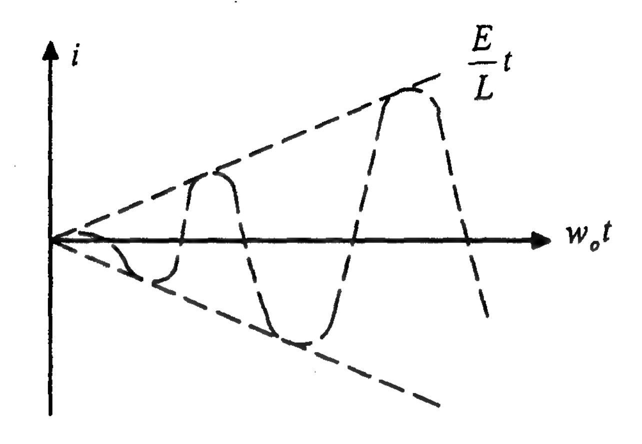
$$i(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{E}{R}\cos w_0 t$$

الحالة الثانية : $R = 0$

وفي هذه الحالة ينعدم ثابت التخميد $\left(\lambda = \frac{R}{2L}\right)$ وتكون $\Omega = w_0$ وتصبح المركبة العابرة $A\cos(w_0 t \varphi_0)$ بتردد زادي w_0 وسعة ثابتة لا تتخامد . أما المركبة المستقرة فمن أول وهلة يبدو أنها لانهائية لكن في الحقيقة نأخذ في النمو بدءا من الصفر لكن دونما حدود لهذا النمو وتقترب من ∞ حيينها $\infty \leftarrow t$ هذا بفرض انعدام المقاومة تماماً (ذلك الفرض الذي يتعذر تحققه تماماً في المسائل العملية) . نعود لحساب المركبة المستقرة تحت شرط $R = 0$, $w = w_0 = 1/\sqrt{Lc}$:-

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + w_0^2 i = -\frac{wE}{L}\sin w_0 t$$

الحل الخاص هو :- $i_p(t) = \frac{E}{2L} t \cos w_0 t$



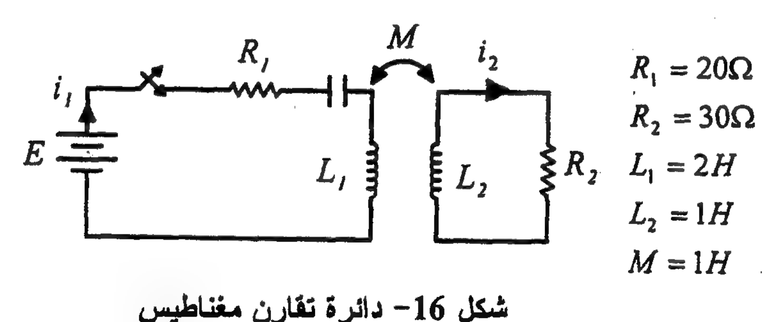
شكل – 15 –

وواضح من المعادلة الأخيرة أن المركبة المستقرة وأن كانت تبدأ منعدمة إلى أنها ستنمو دون حدود بسبب وجود الحد t في سعتها (أي أنها لم تعد لم تعد مستقرة) وحالة الرنين هذه يجب تجنب ظهورها في المنشآت العملية سواء كانت منشآت كهربائية أو ميكانيكية لان ظهور الرنين قد يؤدي إلى انهيار المنشأة بسبب التزايد المستمر في سعة التذبذب .

المثال الثاني عشر :-

في الدائرة المبينة فيما يلى جد المعادلة الزمنية للتيار i_1 المار في الدائرة الابتدائية وللتيار i_2 المار في الدائرة الثانوية . ما هو الزمن الذي عنده يصل تيار الدائرة الثانوية إلى قمته العظمي . ما قيمة هذا التيار ؟

الحل :-



شكل 16– دائرة تقارن مغناطيس

قبل قفل المفتاح كانت الدائرة في حالة استقرار وكان التياران i_2, i_1 منعدمين وهما يبقيان كذلك لحظيا بعد قفل المفتاح نتيجة للحث الموجود في الدائرة . بعد ذلك يأخذ التيار بالابتدائي i_1 في النمو ونتيجة نموه تتولد قوة دافعة كهربائية نتيجة للحث المتبادل M في الدائرة الثانوية مسببه بدورها تيار ثانيا i_2 في الدائرة الثانوية .
في هذه الحالة يوجد مجهولان i_2, i_1 بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على كلتا الدائرتين الابتدائية والثانوية اخذين الحث المتبادل في الحسبان نحصل على :-

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = E \qquad (1)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \qquad (2)$$

وبالتعويض بالقيم العددية المعطاة نحصل على :-

$$2\frac{di_1}{dt} + 20 i_1 + \frac{di_2}{dt} = 100 \qquad (3)$$

$$\frac{di_2}{dt} + 30 i_2 + \frac{di_1}{dt} = 0 \qquad (4)$$

وهاتان معادلتان انياتيان i_2, i_1 بحذف i_2 بينهما نحصل على :-

$$\frac{d^2 i_1}{dt_2} + 80\frac{di_1}{dt} + 600 i_1 = 3000 \qquad (5)$$

المعادلة المميزة :-

$$m^2 + 80m + 600 = 0 \Rightarrow m_1 = -71.62 \quad , \ m_2 = -8.38$$

ويكون الحل المتجانس (المركبة العابرة) هو :-

$$i_{1h} = A_1 e^{mt} + A_2 e^{m_2 t}$$

الحل الخاص (المركبة المستقرة) هو :- $i_{1P} = \frac{3000}{600} = 5A$

إذن $\quad (6) \quad i_1(t) = A_1 e^{-71.62t} + A_2 e^{-8.38t} + 5$

نبحث الشروط الابتدائية عند $t = 0$ يكون $i_1 = 0 \quad = i_2$

وبالتعويض في $(1),(2)$ نجد أن :- $2\frac{di_1}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{di_1}{dt}\Big|_{t=0} = 100$

$$\frac{di_1}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{di_2}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

مما يعنى انه عندما $t = 0$ يكون :- $i_1 = 0 = i_2$

$$\frac{di_1}{dt} = 100 = -\frac{di_2}{dt}$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية هذه على المعادلة (6) نجد أن :-

$$A_1 = -0.92 \quad \text{and } A_2 = -4.08$$

يكون التيار i_1 هو :-

$$i_1 = -0.92e^{-71.62t} - 4.08e^{-8.38t} + 5$$

ولإيجاد i_2 نعوض بعبارة i_1 في المعادلة (2) فنحصل على :-

$$\frac{di_2}{dt} = 100 - 20i_1 - 2\frac{di_1}{dt} = -113.38e^{-71.62t} + 13.22e^{-8.38t} \qquad (7)$$

إذن $i_2 = 1.58e^{-71.62t} - 1.58e^{-8.38t} + A_3$

ومنه $i_2 = o \quad at \ t = 0 \Rightarrow A_3 \Rightarrow 0$

$$i_2 = 1.58\left[e^{-71.62t} - e^{-8.38t}\right] \qquad (8)$$

ويكون i_2 قيمة عظمى إذا انعدم $\frac{di_2}{dt}$ ، من (7) نرى أن ذلك يحدث عند زمن t_m

حيث :- $113.38 \ e^{-7162t_m} = 13.22 \ e^{-8.38tm} \Rightarrow t_m = 0.034s$

وبالتعويض في (8) نجد أن قيمة i_2 العظمى هي $i_2m = -1.05A$ والإشارة السالبة تعني أن التيار يمر عكس الاتجاه المفروض في الشكل السابق

4ـ تطبيقات تركيبة structural Applicotions

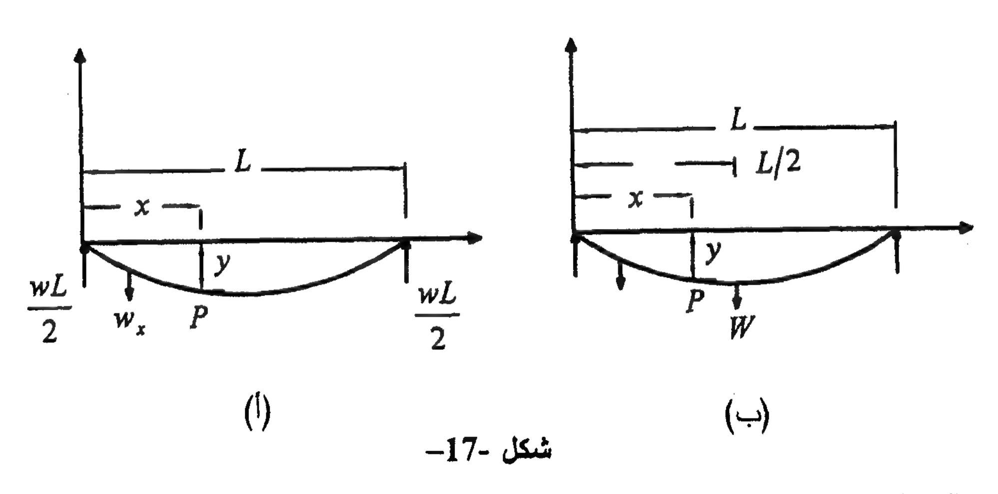
<u>المثال الثالث عشر</u> :-

عارضة أفقية طولها L ترتكز ارتكازاً عند طرفيها ، وتحمل حملاً منتظماً قدرة $w N/m$. جد معادلة المنحنى المرن (منحنى الترخيم) (Elastic or Deflection curve) لهذه العارضة إذا علمنا أن العلاقة بين الترخم y وعزم الانحناء M (Bending Moment) هي:-

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad (1)$$

حيث E هي معامل المرونة (Modulus of Elasticity) لمادة العارضة . I هي عزم القصور الذاتي (عزم العطالة) (Momeut of Interia) لمقطع العارضة حول محور التعادل . اتجاه M الموجب هو الاتجاه الذي يجعل العارضة تتقعر في الاتجاه الموجب لمحور y . ما هو اكبر ترخم يحدث في العارضة ؟

نفس السؤل إذا أضيف حمل مركز W عند منتصف العارضة .



شكل -17-

الحـــل :-

يبين الشكل (l) العارضة $00'$ مع الترخيم الحادث لها نتيجة الحمل المنتظـــم الـــذي كثافته الطولية $w\left(N/_m\right)$. يوجد رد فعل لاعلى قدرة $\omega l/2$ عند كل من الارتكـازين الحرين . نحسب عزم القوى الخارجية حول النقطة $\underline{p}(x,y)$ التي تبعد مسافة x عـن طرف العارضة o المؤثر على جزء العارضة يسار النقطة $\underline{p}$

$$M = x(\frac{\omega l}{2}) - (\frac{1}{2}x)(\omega x)$$

حيث جزء الحمل المنتظم المؤثر يسار $\underline{p}$ هو $\omega x(N)$ إلى اسفل ويعمل عند مســافة مكافئة $(\frac{1}{2}x)$. باستخدام المعادلة (1)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\omega lx - \frac{1}{2}\omega x^2$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للترخيم y . وهي من المرتبة الثانيـــة وحلـــها مباشـــرة بالمكاملة مرتين :

$$EIy' = \frac{1}{4}\omega lx^2 - \frac{1}{6}\omega x^3 + A_1$$

$$EIy = \frac{1}{12}\omega lx^3 - \frac{1}{24}\omega x^4 + A_1 x + A_2$$

ولتعين الثابتين الاختياريين A_2 , A_1 تستخدم الشروط الحدية حيث ينعدم الترخم عند $x = 0$ و $x = L$ إذن :-

ومنه $A_2 = 0 \quad , \; A_1 = -\frac{1}{24} wL^3$

$$y = \frac{w}{24EI}\left(2Lx^3 - x^4 - L^3 x\right)$$

وهذه معادلة منحنى الترخيم (أو منحنى المرونة) ومن السـهل ملاحظـة أن اكـبر ترخيم يحدث عند منتصف العارضة $x = L/2$ وقيمته هي :-

$$y\max = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

2- في حالة وجود حمل مركز W عند منتصف العارضة إضافة للحمل المنتظم فـي هذه الحالة يكون رد الفعل عند كل من الارتكاز ين الحرين هو $\frac{1}{2}(wL + w)$ كمـا في الشكل (ب) . ويستلزم الأمر أن نفرق بين وضعيـن للنقطـة P : فـي نصـف العارضة الأيسر أو في نصفها الأيمن .

أ- **$\underline{p}$ تقع في نصف العارضة الأيسر** $0 < x < L/2$

$$M = \frac{1}{2}(wL + w)x - \frac{1}{2}wx^2$$

أذن $$EIy'' = M = \frac{1}{2}(wL + w)x - \frac{1}{2}wx^2$$

$$EIy' = \frac{1}{4}(wL + w)x^2 - \frac{1}{6}wx^3 + A_1$$

$$EIy = \frac{1}{12}(wL + W)x^3 - \frac{1}{24}wx^4 + A_1 x + A_2$$

لتعين الثابتين الاختياريين A_2, A_1 ونستخدم الشروط الحدية حيث :-

$$At \quad x = 0 \;,\; y = 0 \qquad \text{و} \qquad at \quad x = L/2 \;,\; y' = 0$$

ومنه $$A_1 = -\frac{1}{48}(2wL + 2w)L^2 \quad , A_2 = 0$$

إذن $$y = \frac{w}{24EI}\left(2Lx^3 - x^4 - L^3 x\right) + \frac{w}{48EI}\left(4x^3 - 3L^2 x\right) \qquad (1)$$

ب- P تقع في نصف العارضة الأيمن $(L/2 < x < L)$

في هذه الحالة يدخل الحمل المركزي W عند منتصف العارضة في حساب العزم .

$$M = \frac{1}{2}(wL + w)(L - x) - \frac{1}{2}w(L - x)^2$$

حيث حسبنا العزم من القوى المؤثرة على يمين النقطة وهو نفس الجواب الذي نحصل عليه من القوى المؤثرة على يسار النقطة .

إذن :

$$EIy'' = \frac{1}{2}(\omega L + W)(L - x) - \frac{1}{2}\omega(L - x)^2$$

$$EIy' = -\frac{1}{4}(\omega L + W)(L-x)^2 + \frac{1}{6}\omega(L-x)^3 + A_3$$

$$EIy = \frac{1}{12}(\omega L + W)(L-x)^3 - \frac{1}{24}\omega(L-x)^4 + A_3 x + A_4$$

ومن الشروط الحدية كون : $y' = 0$ عند $x = L/2$ و $y = 0$ عند $x = L$ فإن :

$$A_3 = \frac{1}{48}(2\omega L + 3W)L^2 , A_4 = -\frac{1}{48}(2\omega L + 3W)L^3$$

وبالتعويض نحصل على :

$$y = \frac{\omega}{24\text{EI}}(2Lx^3 - x^4 - L^3 x) + \frac{\omega}{48\text{EI}}(L^3 - 9L^2 x + 12Lx^2 - 4x^3) \qquad (2)$$

وأكبر ترخيم يحدث عند منتصف العارضة وذلك بوضـــع $x = L/2$ فـــي العبـــارتين السابقتين (1) و(2) نحصل على :

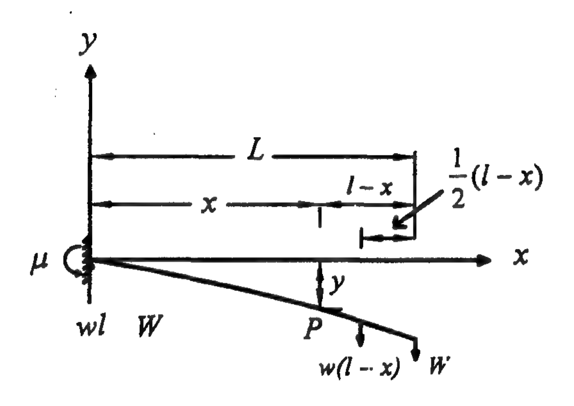
$$y_{\max} = -\frac{5\omega L^4}{384\text{EI}} - \frac{WL^3}{48\text{EI}}$$

أي أن الزيادة في الترخيم نتيجة للعمل W المركز في المنتصف هو $\frac{WL^3}{84\text{EI}}$.

<u>المثال الرابع عشر</u>:-

عارضة أفقية طولها L مثبتة عند أحد طرفيها وطرفها الأخر حر. جد معادلة المنحنى المرن لهذه العارضة إذا كانت تحمل حملا منتظما $\omega N / M$ ويؤثـــر علـــى مركـــز $W(N)$ عند طرفها الحر . جد أكبر ترخيم في العارضة . مـــا هـــو عـــزم ازدواج التثبيت عند الطرف المثبت ؟

الحـــل :-



شكل – 18 -

يبين الشكل السابق العارضة $00'$ المثبتة عند أحد طرفيها 0 والحرة عند الطـــرف الآخر $0'$. تتزن العارضة تحت تأثير الحمل المركز W عند $0'$ والحمـــل المنتظـــم التوزيع $w(N/m)$ على امتداد العارضة ، ورد فعل $(W+wL)$ ، وازدواج تثبيـــت μ عنده 0 يؤثر به الجدار على العارضة . نأخذ نقطـــة الأصـــل عنـــد 0 . وتظـــل العارضة أفقية عند 0 بسبب كونها مثبته هناك وينتج عن ذلك أن يكون :

$$y=0 \quad , \frac{dy}{dx}=0 \quad \text{فان} \quad x=0 \quad \text{عند} \qquad (1)$$

حيث y هو الترخيم الحادث في العارضة عند النقطة P

نحسب عزم المنحنى عند النقطة P ونعتبر جزء العارضة عن يمين P للتخلص مـــن الازدواج μ المجهول عند 0 .

$$M = -W(L-x) - w(L-x)\left[\frac{1}{2}(L-x)\right]$$
$$= -W(L-x) - \frac{1}{2}w(L-x)^2$$

ويلاحظ أن عزم القوة W يعطي عزما سالبا لأنه يميل لجعل العارضة تتقعــر فــي اتجاه محور y السالب وكذلك الحال بالنسبة للقوة المنتظمة التوزيع $w(L-x)$ بتطبيــق المعادلة :

$$EIy'' = M$$

نحصل على :-

$$EIy'' = -W(L-x) - \frac{1}{2}w(L-w)^2$$
$$EIy' = \frac{1}{2}W(L-x)^2 + \frac{1}{6}w(L-w)^3 + A_1$$
$$EIy = -\frac{1}{6}W(L-x)^3 - \frac{1}{24}w(L-x)^4 + A_1x + A_2$$

وباستخدام الشروط الحدية (1) نحصل على :

$$A_1 = -\frac{1}{6}\left(3WL^2 + wL^3\right) \qquad , A_2 = \frac{1}{6}WL^3 + \frac{1}{24}wL^4$$

إذن

$$y = \frac{w}{24EI}\left[4Lx^3 - x^4 - 6L^2x^2\right] + \frac{W}{6EI}\left(x^3 - 3Lx^2\right)$$

وواضح أن اكبر ترخيم يحدث عند الطرف الحر للعارضة $x = L$ حيث

$$y_{max} = -\frac{WL^3}{3EI} - \frac{WL^4}{8EI} \qquad (2)$$

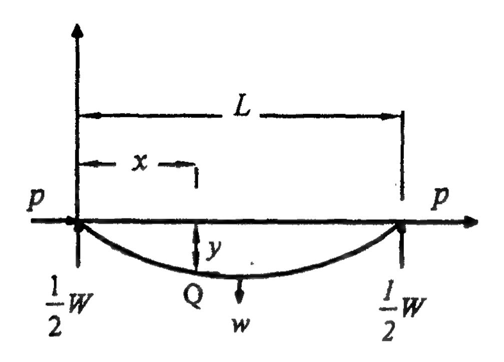
لإيجاد عزم ازدواج التثبيت μ عند 0 نحسب عزم القوي عند أي نقطة معلومة البعد عن 0 مرة عن يمين هذه النقطة ومرة أخرى عن يسارها وتساوي النتيجتين . عـــزم القوي عند 0 محسوبا من يمينها هو $\left(-WL-\frac{1}{2}wL^2\right)$ ومحسوبا من يسارها $(-\mu)$ طبقاً لاتجاه μ المفروض في الشكل السابق وعليه يكون :

$$\mu = WL + \frac{1}{2}\omega L^2 (N.M)$$

المثال الخامس عشر :

ضاغط (strat) أفقي خفيف طوله L يرتكز ارتكازاً مفصلياً حراً عند طرفية ويؤثـــر عليه حمل مركز W نيوتن عند منتصفة ويتعرض لضغط محوري P عند كل مـــن طرفية . جد معادلة المنحنى الذي ينبعج فيه الضاغط . ما هي أكبر قيمة لعزم القـــوى وأين تحدث ؟

الحـــل :-



شكل – 19 –

يبين الشكل السابق الضاغط المعطى OO' والقوى المؤثرة علية وهي الحمل المركـــز W رأسياً لأسفل عند منتصفه ، وضغط P أفقياً عند كل طرف ، ورد فعـــل رأســـي

لأعلى $\frac{1}{2}W$ عند كل طرف . ونأخذ نقطة الأصل عند الطرف O ، ونأخذ الاتجـــاه الموجب لمحور y عكس الترخيم كما هو مبين في الشكل . بأخذ العزوم حول نقطـــة Q على النصف الأيسر للضاغط نجد أن :

$$\text{EI}y'' = -(\frac{1}{2}Wx + \rho y) \qquad O < X < L/2 \qquad \textbf{(1)}$$

حيث الإشارة السالبة تعنى أنه لقيم y السالبة ، كما هو الحال في حالتنا هـــذه تكـــون y'' موجبة أي الضاغط مقعراً ناحية الأتجاة الموجب لمحور y . بالقسمة على EI وإعادة الترتيب نجد أن :

$$y'' + \frac{\rho}{\text{EI}} y = -\frac{W}{2\text{EI}} x \qquad (2)$$

وبإيجاد الحل المتجانس والحل الخاص لهذه المعادلة يكون الحل الكامل :

$$Y = A\cos(\sqrt{\frac{P}{\text{EI}}}x) + B\sin(\sqrt{\frac{P}{\text{EI}}}x) - \frac{W}{2\rho}x \qquad (3)$$

بوضع $\beta = \sqrt{P / EI} rad / m$

تصبح $y = A\cos\beta + C\sin\beta x - \frac{W}{2P}x$

ينعدم الترخيم عند $x = 0$ إذن :- $A = 0$

ويكون $y = C\sin Bx - \frac{W}{2P}x$

وواضح من التماثل في الشكل السابق أن $y' = 0$ عند $x = L/2$

إذن
$$y' = \left[BC\cos\beta x \ , \ \frac{W}{2P} \right]_{x=L/2} = 0 \Rightarrow C = \frac{W}{2BP}\sec\beta\frac{L}{2}$$

ويكون :-
$$y = \frac{W}{2BP}\left[\sec(B\frac{L}{2})\sin Bx - Bx \right]$$

وهذه هي معادلة منحنى الترخيم لقيم $0 < x < \frac{L}{2}$ أي لنصف الضاغط الأيسر وهـــي تتماثل مع معادلة المنحنى الضاغط الأيمن .

واكبر ترخيم يحدث عند منتصف الضاغط $x = L/2$ وقيمته هي :

$$y_{mex} = \frac{W}{2BP}\left[\tan\beta\frac{L}{2} - \beta\frac{1}{2} \right]$$

كما ينتج من الطرف الأيسر للمعادلة (1) أن اكبر قيمة لعــزم القــوي تحــدث عنــد $x = L/2$ وقيمته عندها :

$$M_{mex} = \frac{1}{2}W\frac{L}{2} + Py_{mex}$$

أو
$$M_{mex} = \frac{W}{2B}\tan B\frac{1}{2}$$

ويلاحظ من عبارة y أن الترخيم عند منتصف الضاغط يؤول إلى اللانهاية وفي هــذه الحالة ينهار الضاغط إذا كان :-

$$B\frac{L}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad n = 0,1,2.........$$

وبالتعويض عن β نجد أن قوة الضغط المقابلة هي :-

$$P_C = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad , \quad n = 0,1,2,........$$

وتسمى قوى الضغط المحورية هو بالأعمال المحورية الحرجة (critical Axials loads) والقيمة المهمة عمليا هي التي تقابل $n = 0$ أي $P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ وفي الواقع فان الضاغط لا ينتظر حتى يؤول الترخيم إلى اللانهاية ثم ينكسر بل إذا تعدى الترخيم حدا معينا فان الضاغط يفقد مرونته ثم ينثني كما يلاحظ أن معادلة المنحنى المرن تصبح تقريبية بازدياد الترخيم .

تمـــــــارين

I—عضو من طائفة المنحنيات التي معادلتها التفاضلية : -

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 4$$

يمس محور x عند نقطة الأصل . ما هو نصف قطر انحناء المنحنى عند نقطة الأصل ؟ وما هي معادلة عضو هذه الطائفة هذا ؟

II- جد معادلة طائفة المنحنيات التي لكل عضو فيها يكون نصف قطر الانحناء عند أي نقطة متناسبا وميل المماس عند هذه النقطة ؟

III- بندول طوله ℓ كتلته عند أحد طرفيه m ويدور في مستوى رأسي حول طرفه الآخر

أ – بإهمال كل القوي عدا قوة الجاذبية , جد الصورة العامة لمعادلة الحركة .

ب- كما في (أ) لكن باعتبار الإزاحة عن وضع الاتزان إزاحة صغيرة .

ج- كما في -ب- إذا أطلق البندول سرعة زاوية $1rad/\sec$ مبتعدا عن وضع الاتزان الراسي من عند إزاحة زاوية $\frac{1}{6}rad$ من وضع الاتزان وكان طول البندول $20cm$.

اعتبر عجلة الجاذبية $g = 10m/sce^2$. ما هي أقصى إزاحة زاوية للبندول ؟ و ما هي أقصى سرعة زاوية له ؟ وأين تحدث ؟

iv— عوامة أسطوانية الشكل قطرها نصف متر وضعت في الماء فانغمر اغلبها في وضع رأسي . عندما دفعت قليلا للأسفل وتركت للتحرك حرة لوحظ أن الزمن الدوري لذبذبتها هو ثابتان ما هي كتلة الطافية ؟

V- جسيم يتحرك في المستوى xy بحيث كان إحداثياه (x,y) عنـــد أي لحظــة t يحققان المعادلتين التفاضليتين .

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w\frac{dy}{dt}=w^2 \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=w\frac{dx}{dt}$$

حيث a , w ثابتان . جد مسار هذا الجسم إذا بدا الجسيم الحركة من الســـكون عند نقطة الأصل . ما هي للحظات التي يتحرك فيها الجسم :

أ – موازيا لمحور y

ب– موازيا لمحور x

ج– موازيا للخط المستقيم $y=x$

VI- دائرة نوال تتكون من محاثة $2H$ ومقاومته(4Ω)وســـعة $50mF$ فــإذا كـــان التيار منعدما وشحنة السعة $2C$ عند $t=0$ جد المعادلة الزمنية للتيار وكذلك مركبته المستقرة إذا :

أ – سلطة قوة دافعة كهربية مستمرة $100V$ بين طرفي الدائرة .

ب– سلطة قوة دافعة كهربية مترددة $100\cos 4t$ بين طرفي الدائرة .

اعد الحل إذا كانت المقاومة 40Ω .

VII- المعادلة الآسية في نظرية الكمرات البسيطة هي :-

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)=wx$$

حيث $w(x)$ هو المحمل على وحدة الأطوال ، EI ثابت من ثوابت الكمرة يعـــرف بجسادة الثني (Flexural Rigidity) , [E هي معامل المرونة لمادة الكمرة I

هي عزم القصور لمقطع حول محور التعادل] $y,$ هي الترخيم في الكمرة عند نقطـة x عليها . حل المعادلة إذا كانت EI ثابتة , $w(x)=24x$

وأحوال الترخيم هي $y(0)=y''(0)=0$, $y(L)=0=y''(L)$

الفصل التاسع

متسلسلات الحلول للمعادلات الخطية من المرتبة الثانية

Series Solutions of Second order linear Equations

الفصل التاسع

متسلسلات الحلول للمعادلات الخطية من المرتبة الثانية

Series Solutions of Second order linear Equations

Introduction :   IX ـ 1 مقدمــــة :

Definitions Concepts :   **تعاريف ومفاهيم :**

في كثير من الحالات يتعذر حل المعـــادلات التفاضليـــة مـــن المرتبـــة الثانيـــة ذات المعاملات المتغيرة على صورة مغلقة . وتقدم لنا طريقة الحل على هيـــأة متسلســـلة بديلاً قوياً قد لا يكون هناك مناص منه .

على أن فكرة الحل على هيأة متسلسلة لا تقتصر علـــى المعـــادلات ذات المعـــادلات المتغيرة بل تشمل بطبيعة الحال المعادلات ذات المعـــاملات الثابتـــة كذلـــك تشـــمل المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة .

قبل البدء في برهان وجود الحل وكيفية إيجاده نراجع أهم التعاريف والمفاهيم المتعلقـــة بالمتسلسلات .

Index of a series :   أـ دليـل المـتسـلسـلـــة :

دليل المتسلسلة هو المتغير الذي تجرى عليه عمليـــة الجمـــع ويظـــهر فـــي تعبـــير المتسلسلة كما يظهر أسفل علامة الجمع Σ . فمثلاً في المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=o}^{n=100} \frac{n^2+1}{(n+1)!} \quad , \quad \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \quad , \quad \sum_{n=\infty}^{\infty} C_n e^{inkx}$$

n هو الدليل . ويمكن تغيير الدليل n إلى m أو k دون أن يؤثر على قيمة المتسلسلة ولذا يسمى الدليل n بالدليل الدمية (Dummy Index) فمثلاً :

$$\sum_{n=o}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}=\sum_{m=o}^{\infty}\frac{2^m x^m}{m!}=\sum_{k=o}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k!}$$

وسنوضح كيف يمكن تغيير الدليل n في الأمثلة المختلفة التالية دون أن يؤثر ذلك على قيمة المتسلسلة :

-1

$$\sum_{n=2}^{\infty}Q_n x^n = Q_2x^2+Q_3x^3+Q_4x^4+....+Q_nx^n+...$$

$$=Q_{o+2}x^{o+2}+Q_{1+2}x^{1+2}+Q_{2+2}x^{2+2}+....+Q_{m+2}x^{m+2}+...$$

$$=\sum_{m=o}^{\infty}Q_{m+2}x^{m+2}=\sum_{n=o}^{\infty}Q_{n+2}x^{n+2}$$

فقد غيرنا الدليل $n+2 \to n$ حيث أخذنا في عين الاعتبار التخفيض 2 .

-2

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)\,Q_n\,(x-Q)^{n-2}$$

أنه يمكن كتابة هذه المتسلسلة على شكل متسلسلة للحد العام $(x-Q)^n$ عوضا عن $(x-Q)^{n-2}$ للحصول على ذلك نغير الدليل $n+2 \to n$ ونبدأ في الأخذ بعين الاعتبار التخفيض 2 كما هو في المثال السابق .

$$S=\sum_{n=o}^{\infty}(n+4)(n+3)\,Q_{n+2}(x-Q)^n$$

-3

$$x^2\sum_{n=o}^{\infty}(n+r).Q_n.x^{n+r-1}$$

أولاً ندخل x^2 تحت الجمع فنحصل على :

$$\sum_{n=o}^{\infty}(n+r)Q_n x^{n+r+1}$$

ويمكن أن نكتب هذه المتسلسلة على شكل متسلسلة ذات الحد العام x^{n+r} بتغيير الدليل $(n \to n-1)$ ونبدأ في الأخذ بعين الاعتبار الرفع 1:

$$\sum_{n=o}^{\infty}(n+r)Q_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)Q_{n-1} x^{n+r}$$

ويمكن التحقق من أن الحدود في المتسلسلتين متطابقة تماماً .

4- في المثال التالي نأخذ المعادلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nQ_n x^{n-1} = \sum_{n=o}^{\infty} Q_n x^n$$

لمساواة معاملات الحدود من نفس قوة x في طرفي المعادلة فإنه من السهل كتابة المتسلسلتين بالنسبة للحد العام x^n أي يجب أن نغير الدليل n في المتسلسلة الأولى : $(n \to n+1)$

$$\sum_{n=o}^{\infty}(n+1)Q_{n+1} x^n = \sum_{n=o}^{\infty} Q_n x^n$$

نستنتج أن : $(n+1)Q_{n+1} = Q_n$ من اجل $n = o,1,2,...$

أو
$$Q_{n+1} = \frac{1}{n+1}Q_n$$

إذن $Q_2 = \frac{1}{2}Q_1 = \frac{1}{2.1}Q_o = \frac{Qo}{2!}$, $Q_1 = \frac{1}{1}Q_o$

$$Q_3 = \frac{1}{3}Q_2 = \frac{1}{3}\frac{Qo}{2!} = \frac{Qo}{3!},....,$$

وعموماً : $Q_n = \frac{1}{n!}Q_o \quad , \quad n = 1,2,....$

إذن العلاقة الجديدة تعين جميع المعاملات بدلالة الحد Q_0

إذن $$\sum_{n=o}^{\infty} Q_n x^n = \sum_{n=o}^{\infty} Q_o \frac{x^n}{n!} = Q_o \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = Q_o e^x$$

وفي كتابة المتسلسلة الأخيرة فقد استعملنا المصطلح العام $O! = 1$

ب ـ متسلسلة القوى **Power series**

متسلسلة القوى حول نقطة $x = x_o$ هي متسلسلة لانهائية في قوى $(x - x_o)$ الموجبة على الصورة :

$$S(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n (x - x_o)^n = c_o + c_1(x - x_o) + c_2(x - x_o)^2 + ...$$

حيث $\{C_n\}_{n=o}^{\infty}$ ثوابت تعرف بمعاملات المتسلسلة (Coefficients) و $x = x_o$ نقطة ثابتة تسمى مركز المتسلسلة (Center) . ونؤكد أن متسلسلة القوى لا تحتوي على قوى سالبة أو كسرية للمتغير $(x - x_o)$. وإذا كان مركز المتسلسلة هو نقطة الأصل $(x_o = o)$ فإن المتسلسلة تأخذ الصورة :

$$S(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n = c_o + c_1 x + c_2 x^2 + ...$$

وسنعرض في هذا الباب أن المعاملات C_i والمركز x_o هي كميات حقيقية على وجه العموم . ويسمى المجموع :

$$S_n(x)=\sum_{n=o}^{N}c_n(x-x_o)^n=c_o+c_1(x-x_o)+c_2(x-x_o)^2+...+c_N(x-x_o)^N$$

حيث N عدد صحيح موجب بالمجموع الجزئي (partial sum) لمتسلسلة القوى بينما يسمى مجموع الحدود المتبقية

$$R_N(x)=\sum_{n=N+1}^{\infty}c_n(x-x_o)^n=c_{N+1}(x-x_o)^{N+1}+c_{N+2}(x-x_o)^{N+2}+...$$

بالمتبقي (Remainder) وواضح أن :

$$R_N(x)=\mathrm{S}(x)-S_N(x)$$

ونلخص فيما يلي دون برهان ، بعض النتائج الهامة المتعلقة بالمتسلسلات اللانهائية وخاصة متسلسلات القوى .

1- يقال عن متسلسلة القوى: $S_n(x)=\sum_{n=o}^{\infty}c_n(x-x_o)^n$ أنها متقاربة أو تقاربيه (Convergent) عند النقطة x إذا كانت :

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=o}^{N}c_n(x-x_o)^n$$

موجودة .

وواضح أن المتسلسلة متقاربة عند مركزها $x=x_o$:

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x_o)=\lim_{N\to\infty}C_o=C_o=\mathrm{S}(x_o)$$

أي أن النهاية موجودة .

وإذا لم توجد هذه النهاية تكون المتسلسلة متباعدة أو تباعدية (Divergent) عند النقطة x .

وقد تكون المتسلسلة متقاربة عند كل قيم x وقد تكون متقاربة عند بعض قيم x ومتباعدة عند القيم الأخرى .

2- يقال عن متسلسلة القوى $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_o)^n$ أنها متقاربة مطلقا (Converges absolutely) عند النقطة x إذا كانت المتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n (x-x_o)^n \right|$$

متقاربة و العكس غير صحيح .

3- ولمعرفة التقارب المطلق نستخدم إحدى الاختبارات النافعة لمتسلسلة قوى وهو اختبار النسبة . إذا كانت من أجل قيمة x ثابتة (Ratio Test) :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_o)^{n+1}}{c_n(x-x_o)^n}\right| = |x-x_o| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \ell$$

وتكون متسلسلة القوى متقاربة مطلقا عند قيمة x إذا كان $\ell<1$ ومتباعدة إذا كان $\ell>1$. وإذا كان $\ell=1$ فالاختبار غير حاسم .

<u>مثال - 5-</u>

ما هي قيم x التي تكون من اجلها متسلسلة القوى التالية :-

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x-2)^n$$

متقاربة .

الحل :

لاختبار التقارب نستخدم اختبار النسبة (Ratio test) لدينا :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^{n}}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = |x-2|$$

ووفق القاعدة -3- تكون المتسلسلة متقاربة مطلقا من اجل $|x-2|<1$ أي عند $1<x<3$. ومتباعدة من اجل $|x-2|>1$. وقيم x المرافقة لـ $|x-2|=1$ هي $x=1$ و $x=3$.

والمتسلسلة متباعدة عند هاتين القيمتين للمتغير x لان الحد النوني للمتسلسلة لا يؤول إلى الصفر عندما $n\to\infty$.

4- إذا كانت متسلسلة القوى $S(x)=\sum_{n=o}^{\infty}c_n(x-x_o)^n$ متقاربة عند $x=x_1$ فهي متقاربة مطلقا من اجل $|x-x_o|<|x_1-x_o|$. وإذا كانت متباعدة عند $x=x_1$ فهي متباعدة من اجل $|x-x_o|>|x_1-x_o|$.

5- يعرف نصف قطر التقارب R_c (Radius of convergence) بأنه المسافة بين المركز x_o وأقرب نقطة منه تكون عندها المتسلسلة متباعدة أي $S(x)=\sum_{n=o}^{\infty}c_n(x-x_o)^n$ متقاربة مطلقا من اجل $|x-x_o|<R_c$ ومتباعدة من اجل $|x-x_o|>R_c$.

متباعدة   متباعدة x

x_o-R_c x_o x_o+R_c

المتسلسلة متقاربة

فمتسلسلة تتقارب عند $x = x_o$ فقط يكون نصف قطر تقاربها معدوم ومتسلسلة تتقارب عند كل قيم x يكون نصف قطر تقاربها لا نهائي .

<u>مثال -6-</u>

أوجد نصف قطر تقارب متسلسلة القوى التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

الحـــل : تطبيق اختبار النسبة :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-x_o)^{n+1}}{c_n(x-x_o)^n}\right| = |x-x_o|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \ell$$

وكي تتقارب المتسلسلة يجب أن تكون هذه النسبة دون الواحد الصحيح لجميع قيم x ،
إذن :

$$|x-x_o|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \Rightarrow |x-x_o| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = R_c$$

إذن في هذه الحالة :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}\, n2^2}{(n+1)2^{n+1}(x+1)^n}\right| = |x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{|x+1|}{2}$$

إذن المتسلسلة متقاربة مطلقا من اجل $|x+1| < 2$

أي $3 < x < 1$

وتتباعد المتسلسلة من اجل $|x+1|>2$

إذن نصف قطر التقارب $R_c = 2$

في النهاية ، نتعرض لاخر نقطة وهي مجال التقارب (Convergence Interval)

عند $x=-3$.

لدينا :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

وهي متقاربة ولكن ليست متقاربة مطلقا ، إذن المتسلسلة متقاربة عند النقطة $x=-3$.

عند $x=1$ المتسلسلة تصبح : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

وهي متباعدة .

إذن المتسلسلة متقاربة على المجال : $-3 \le x < 1$

ومتقاربة مطلقاً على المجال : $-3 < x < 1$

ونصف قطر التقارب $R_c = 2$.

<u>ملاحظة :</u>

كذلك يمكن استخدام صيغة كوشي – هاداماار (Cauchy) (Hadamard Formula) لحساب نصف قطر التقارب وهي :

$$\frac{1}{R_c}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}$$

وذلك بغرض وجود هذه النهاية .

<u>**مثال -7-**</u>

في متسلسلة القوى $e^x = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ يكون نصف قطر التقارب هو :

$$\frac{1}{R_c} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(n+1)!}{1/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = o \Rightarrow R_c = \infty$$

وعلى ذلك فنصف قطر تقارب الدالة الأساسية e^x لا نهائي بمعنى أنها تتقارب عنـــد جميع قيم x الموجبة أو السالبة .

بينما في المتسلسلة $\sum(n!)(x-a)^2$ يعطي نصف التقارب بـــ:

$$\frac{1}{R_c} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\forall}(n+1) = \infty \Rightarrow \mathrm{R_c} = o$$

مما يعني أن المتسلسلة لا تتقارب إلا عند النقطة $x = a$ فقط .

كذلك فنصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum\frac{1}{3^n}(x-1)^n$ هو :

$$\frac{1}{R_c} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \quad \mathrm{R_c} = 3$$

وبالتالي فنصف قطر التقارب حول النقطة $x = 1$ هو $R_c = 3$ أي أنها تتقارب لقيـــم x التي تحقق المتباينة $-2 < x < 4$.

ونذكر الآن بعض العمليات التي تجرى على متسلسلات القوى والتي تهمنا فـــي حـــل المعادلات التفاضلية على هيئة متسلسلة قوى :

إذا كانت: $S_1(x) = \sum_{n=o}^{\infty}a_n(x-x_o)^n$ و $S_2(x) = \sum_{n=o}^{\infty}b_n(x-x_o)^n$ متسلسلتين

متقاربتين على مجال التقارب $|x-x_o|<R_c$ حيث $R_c>o$ إذن لدينا ما يلي :

6- يمكن جمع وطرح المتسلسلتين المتقاربتين حداً حداً لنحصل على المجموع علـــى هيئة متسلسلة قوى تتقارب على المجال $|x-x_o|<R_c$:

$$S_1(x)\pm S_2(x)=\sum_{n=o}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_o)^n$$

7- يمكن ضرب المتسلسلتين حيث يضرب كل حد من حدود إحدى المتسلسلتين فـــي جميع حدود المتسلسلة الأخرى ثم نجمع قوى $(x-x_o)$ المتشابهة لنحصل علـــى حاصل الضرب على هيئة متسلسلة قوى متقارب على المجال $|x-x_o|<R_c$:

$$S_1(x)S_2(x)=\left[\sum_{n=o}^{\infty}\mathrm{Q_n}(x-x_o)^n\right]\left[\sum_{n=o}^{\infty}b_n(x-x_o)^n\right]$$

$$=a_ob_o+(a_ob_1+a_1b_o)(x-x_o)+(a_ob_2+a_1b_1+a_2b_o)(x-x_o)^2+\ldots$$

$$=\sum_{n=o}^{\infty}\left[\sum_{i=o}^{n}a_i\cdot b_{n-i}\right](x-x_o)^n$$

وتعرف هذه الصيغة بحاصل ضرب كوشي (Cauchy Product) وكذلك إذا كـــانت $S_2(x_o)\neq o$ فيمكن قسمة المتسلسلتين حيث :

$$\frac{s_1(x)}{s_2(x)}=\sum_{n=o}^{\infty}d_n(x-x_o)^n$$

ويكون حساب المعامل d_n في بعض الأحيان معقد . كذلك في حالة القســـمة يكـــون نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى الحاصلة أقل من R_c .

مثال -8-

$$e^{x}=\sum\frac{1}{n!}x^{n} \quad , \quad e^{-x}=\sum\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}$$

إذن

$$e^{x}+e^{-x}=\sum\frac{1}{n!}x^{n}+\sum\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}=\sum\frac{1}{n!}\left[1+(-1)^{n}\right]x^{n}$$

$$=2\sum_{n=0,2,4}\frac{1}{n!}x^{n}=2\sum_{m=o}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}x^{2m}=2\cosh x$$

وذلك بتغيير الدليل الدمية من n إلى $2m$ أي بوضع $m=n/2$.

مثال -9-

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\ldots$$

إذن

$$\sin x\cos x=\left[x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\ldots\right]\left[1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\ldots\right]$$

$$=0\times1+\left[0\times0+1(1)\right]x+\left[0(-\frac{1}{2!})+1(0)+0(1)\right]x^{2}$$

$$+\left[0\times0+1(-\frac{1}{2!})+0(0)+(-\frac{1}{3!})(1)\right]x^{3}+\ldots$$

$$=x-\frac{2}{3}x^{3}+\ldots=\frac{1}{2}\left[(2x)-\frac{(2x)^{3}}{3!}+\ldots\right]=\frac{1}{2}\sin 2x$$

8- إذا كان $\sum b_n (x-x_o)^n = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (x-x_o)^n$ من اجل كل قيم x إذن

$$a_n = b_n \quad , \quad n = 0,1,2,...$$

وعلى الخصوص إذا انعدمت متسلسلة قوى متقاربة على مجال ما انعداما تطابقيـــاً ، انعدم كل معاملاتها .

إذا كانت : $$\sum_{n=o}^{\infty} Q_n (x-x_o)^n = 0$$

إذن : $$Q_o = Q_1 = Q_2 = ... = Q_n = ... = 0$$

9- يمكن مفاضلة متسلسلة قوى في مجال ما حداً حداً لنحصل على متسلســلة قــوى جديدة متقاربة أيضاً في نفس المجال وتمثل مشتقة المتسلسلة الأصلية .

$$S_1(x) = \sum_{n=o}^{\infty} Q_n (x-x_o)^n \qquad |x-x_o| < R_c$$

إذن $$S_1'(x) = Q_1 + 2Q_2(x-x_o) + ... + nQ_n(x-x_o)^{n-1} + ...$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nQ_n (x-x_o)^{n-1} \quad , \quad |x-x_o| < R_c$$

10- متسلسلة تيلور (1685-1731) Taylor Series

تمثل أي دالة $f(x)$ قابلة للتفاضل عند $x = x_o$ (أي توجد جميع مشتقاتها عن $x = x_o$) بمتسلسلة قوى حول $x = x_o$ تسمى متسلسلة تيلور على الصورة :

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + \frac{f''(n_o)}{2!}(x-x_o)^2 + ...(1)$$

وواضح أن المعاملات هنا تمثل خصائص الدالة $f(x)$ عند مركز المتسلسلة $x = x_o$ وهذه الخصائص هي قيمة الدالة ومعدلات تغيرها .

ولا يمكن تمثيل دالة بمتسلسلة تيلور حول نقطة تكون عندها الدالة أو إحدى مشتقاتها لا نهائية القيمة .

11- الدالة التحليلية (Analytic Function)

يقال عن الدالة $f(x)$ انها تحليلية (Analytic) عند نقطة ما $x = x_o$ إذا أمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى (متسلسلة تيلور) في قوى $(x - x_o)$ صالحة في جوار مباشر للنقطة $x = x_o$ أي تتقارب في فترة $0 < |x - x_o| < R_c$ حيث R_c هو نصف قطر التقارب .

مثال -10-

لتكن لدينا الدالة $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ هي دالة تحليلية عند جميع النقط عدا النقطة $x = 2$ فمثلا تكون تحليلية عند $x = 1$ لانه يمكن تمثيلها بمتسلسلة تيلور في قوى $x - 1$:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{[1-(x-1)]^2} = [1-(x-1)]^{-2} = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^{2+\dots}$$

ونصف قطر تقاربها هو $R_c = 1$ أي ان هذه المتسلسلة متقاربة في المجال $0 < x - 1 < 1$

كذلك فالدالة $f(x) = \ln x$ تحليلية عند جميع قيم x عدا عند القيمة $x = 0$.

والدالة $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ تحليلية عند جميع قيم x عدا عند النقط $(2m+1)\pi/2$.

حيث m عدد صحيح . وعموماً لا تكون الدالة تحليلية عند النقط التي تكون عندهـــا الدالة أو إحدى مشتقاتها لا نهائية القيمة .

جـ - النقطــة العاديــة والنقطــة المنفــردة لمعادلــة تفاضليــة :

Ordinary and Singular Point of Differential Equation:

لنعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (2)$$

تكون النقطة $x = x_o$ نقطة عادية (Ordinary Point) لهذه المعادلـــة التفاضليـــة اذا كانت كل من الدالتين $Q(x)$, $P(x)$ دالتان تحليليتان عند $x = x_o$.
أما إذا كانت إحدى أو كلتا الدالتين غير تحليلية عند $x = x_o$ كانت النقطة $x = x_o$ نقطـــة منفـــردة (Singular Point) للمعادلة . وتكون النقطة $x = x_o$ نقطة منفـــردة منتظمة (Regular Singular Point) إذا كانت $P(x)$ و $Q(x)$ غـــير تحليليـــة عند $x = x_o$ ولكن كلا من $(x = x_o)P(x)$ و $(x = x_o)^2Q(x)$ دالة تحليليـــة عنـــد $x = x_o$.
وإلا كانت $x = x_o$ نقطة منفردة غير منتظمة (Irregular Singular Point)

<u>**أمثلة -11-**</u>

1- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية : $y'' + 3y' + xy = 0$
تكون النقطة $x = 1$ نقطة عادية وكذلك جميع النقاط الأخرى على محورة .

2- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \;\Rightarrow\; y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

فالنقطة $x=0$ هي نقطة منفردة لأن $P(x)=-\frac{1}{x}$ ، $Q(x)=\frac{1}{x^2}$ غــير تحليليتيــن عند $x=0$ ومع ذلك فالدالتان $xP(x)=-1$ ، $x^2Q(x)=1$ تحليليتان عند $x=0$ وعليه فالنقطة $x=0$ نقطة منتظمة . أما جميع النقط الأخرى فهي نقط عادية .

3- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية :

$$x^3y''+y=0 \Rightarrow y''-y'+\frac{1}{x^2}y=0$$

فالنقطة $x=0$ نقطة منفردة لان $Q(x)=\frac{1}{x^3}$ غير تحليلية عندها .

وبما أن الدالة $x^2Q(x)=\frac{1}{x}$ تظل غير تحليلية عند $x=0$ إذن فالنقطة $x=0$ هــي نقطة منفردة غير منتظمة . أما باقي النقط فهي نقط عادية .

4- في المعادلة التفاضلية : $y''+\frac{2}{x}y'+\frac{3}{x(x-1)^3}y=0$

النقطتان $x=0$ ، $x=1$ نقطتان منفردتان حيث عند النقطة الأولــى $x=0$ تكــون $P(x)=\frac{2}{x}$ ، $Q(x)=\frac{3}{x(x-1)^3}$ كلتاهما غير تحليليتين بينما عند النقطة الثانية $x=1$ تكون إحداهما $Q(x)$ غير تحليلية بينما $P(x)$ تحليلية .

كذلك نلاحظ أن $xP(x)=2$ ، $x^2Q(x)=\frac{3x}{(x-1)^3}$ كلتاهما تحليليتان عند $x=0$.

وعلى ذلك فالنقطة $x=0$ نقطة منفردة منتظمة . وبالعكس عند النقطة $x=1$ تكون $(x-1)P(x)=2(\frac{x-1}{x})$ دالة تحليلية بينما تكون $(x-1)^2Q(x)=\frac{3}{x(x-1)}$ دالــة غير تحليلية عند $x=1$ وعلى ذلك فالنقطة $x=1$ نقطة منفردة غير منتظمة .

IX.2 الحلــول فــي متسلسلــة قــوى بجــوار نقطــة عـاديــة
Power - Series Solutions Near an Ordinary Point

نتناول الآن مسألة إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة مـــن المرتبـــة الثانية ذوات المعاملات المتغيرة أو الثابتة بطبيعة الحال حول إحدى النقط العادية لـهذه المعادلات . وفي هذا الصدد نذكر النظرية التالية :

أ- نظرية -1-

إذا كانت $x = x_o$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

وإذا كانت $P(x)$ و $Q(x)$ دالتين تحليليتين عند $x = x_o$ فإن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$y = \sum_{n=o}^{\infty} Q_n (x - x_o)^n = Q_o y_1(x) + Q_1 y_2(x) \qquad (3)$$

حيث Q_0 ، Q_1 ثابتان اختياريان و $y_2(x)$ ، $y_2(x)$ متسلسلتان تحليليتـــان عنـــد $x = x_o$ ومستقلتان خطيا . ونصف قطر تقارب كل منهما أقل من أصغر نصفي قطر في تقارب متسلسلة $P(x)$ و $Q(x)$.

وتفيد هذه النظرية في إيجاد الحل حول نقطة عادية فقط $x = x_o$ على هيأة متسلســـلة قوى في $(x = x_o)$ ، وتحدد جميع معاملاتها $Q(n)$ بدلالة المعاملتين Q_0 ، Q_1

البرهان :

لدينا حسب الفرض أن النقطة x_o نقطة عادية للمعادلة التفاضلية إذن كل مـــن الدالتين $P(x)$ و $Q(x)$ قابلة للنشر على صورة متسلسلة تيلـــور بجـــوار $x = x_o$ والمتسلسلتين متقاربتين على المجال : $o < |x - x_o| < R_c$ حيث R_c موجـــب وهـــو اصغر نصف قطر تقارب .

أذن

$$P(x)=\sum_{n=o}^{\infty}p_n(x-x_o)^n \qquad \text{(i)}$$

$$Q(x)=\sum_{n=o}^{\infty}q_n(x-x_o)^n \qquad \text{(ii)}$$

لنفرض أن حل المعادلة من الشكل :

$$y=Q_o+Q_1(x-x_o)+Q_2(x-x_o)^2+\ldots+Q_n(x-x_o)^n+\ldots$$

$$y=\sum_{n=o}^{\infty}Q_n(x-x_o)^n$$

بالمفاضلة نجد :

$$y'=\sum_{n=o}^{\infty}Q_n(x-x_o)^n \qquad , \qquad y''=\sum_{n=o}^{\infty}n(n-1)Q_n(x-x_o)^{n-2}$$

حيث المعاملات $\{Q_n\}^{\infty}$ يجب تعيينها بحيث يكون y حلا للمعادلة . ولتعيين هذه المعاملات نعوض y'', y', y بعباراتها في المعادلة التفاضلية

فنجد :

$$\sum_{n=o}^{\infty}n(n-1)Q_n(x-x_0)^{n-2}+\left[\sum_{n=o}^{\forall}\rho_n(x-x_o)^n\right]\left[\sum_{n=o}^{\infty}na_n(x-x_o)^{n-1}\right]+$$
$$\left[\sum_{n=o}^{\forall}q_n(x-x_o)^n\right]\left[\sum_{n=o}^{\infty}P_n(x-x_o)^n\right] \qquad \textbf{(iii)}$$

وبفك الأقواس والمطابقة بين معاملات $(x-x_o)^k$ نجد العلاقات التالية :

$$-2Q_2 = Q_1\rho_o + Q_o q_1$$

$$-2.3Q_3 = 2Q_2\rho_o + Q_1\rho_1 + Q_1 q_o + Q_o q_1$$

وبصورة عامة :

$$-(n-1)n\,Q_n = (n-1)Q_{n-1}\rho_0 + (n-2)a_{n-2}\rho_1 + ... + a_1\rho_{n-2} + + a_{n-2}q_0 + a_{n-3}q_1 + ... + a_1 q_{n-3} + a_0 q_{n-2} \quad \textbf{(iv)}$$

هذه العلاقات بين المعاملات $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ علاقات خطية . وبالتالي تعين لنا كـــل المعاملات بصورة وحيدة بدلالة اثنين اختياريين منها وهي Q_0, Q_1 وبالتالي فـــهناك حل من الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x - x_0)^x \quad \textbf{(V)}$$

حيث $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ تتعين من العلاقـــات الســابقة . ويكفـــي الآن أن نـــبرهن أن المتسلسلة الناتجة متقاربة ليكون الحل قابلاً للنشر .

لقد وجدنا أن الدالتين P, Q يمكن وضعهما على شكل متسلسلتي قوى من الصورة:

$$P(x) = \rho_0 + \rho_1(x - x_0) + ... + \rho_n(x - x_0)^x + ...$$

$$Q(x) = q_0 + q_1(x - x_o) + ... + q_n(x - x_o)^n + ...$$

لنضرب المتسلسلة الثانية في $(x - x_o)$ ولنأخذ القيم المطلقـــة لحـــدود المتسلســـلتين فنجـــد :

$$|P| \le |p_0| + |p_1||x - x_0| + ... + |p_n||x - x_0|^n + ...$$
$$|x - x_0||Q| \le |q_0||x - x_0| + |q_1||x - x_0|^2 + ... + |q_n||x - x_0|^{n+1} + ...$$

ومن اجل $|x - x_0| = r$ حيث $R_c > r$

فأن لكل من الدالتين $|P|$ و $|Q||x - x_0|$ قيمة محدودة وذلك لأن متسلسلتيها متقاربة في المجال $|x - x_0| < R_c$. ولتكن k أكبر هاتين القيمتين . فعندها نكتب :

$$|P_0| + |\rho_1||x - x_0| + \ldots + |\rho_n||x - x_0|^n + \ldots \le k$$
$$|q_0||x - x_0| + |q_1||x - x_0|^2 + \ldots + |q_n||x - x_0|^{n+1} + \ldots \le k \qquad \textbf{(vi)}$$

ولكن مجموع أعداد موجبة أصغر من عدد موجب يعني أن كلاً من هذه الأعداد اصغر من المجموع . وبالتالي نكتب :-

$$\rho_n \le \frac{k}{r^n} \quad , \quad q_n \le \frac{k}{r^{n+1}} \qquad \textbf{(vii)}$$

وإذا سمينا العددين b_1, b_0 من اجل $|Q_1|, |Q_0|$ نجد العلاقات بين المعاملات $Q_2, Q_3, \ldots Q_x$ تصبح: $2|Q_2| \le b_1|P_0| + b_0|q_0| \le b_1 k + b_0\, k/r \le 2b_1 k + b_0\, k/r$

أو :

$$|Q_2| \le b_2$$

حيث :

$$2b_2 = (2b_1 + b_0/r)k$$

وبصورة مشابهة نجد :

$$2.3|Q_3| \le 2|Q_2||P_0| + b_1|P_1| + b_1|q_0| + b_0|q_1|$$

$$\le (2b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_o}{r^2})k$$

$$\le (3b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_o}{r^2})k$$

أو :
$$|Q_3| \le b_3$$

حيث :
$$2.3b_3 = (3b_2 + 2\frac{b_1}{r} + \frac{b_o}{r^2})k$$

وإذا تابعنا بصورة مشابهة نجـد: $|Q_n| \le b_n$

حيث :

$$(n-1)nb_n = \left[nb_{n-1} + \frac{(n-1)bn-2}{r} + \ldots + \frac{bo}{r^{n+1}}\right]k \qquad \textbf{(viii)}$$

ومن العلاقة الأخيرة نجد :

$$(n-2)(n-1)b_{n-1} = \left[(n-1)b_{n-2} + \frac{(n-2)bn-3}{r} + \ldots + \frac{bo}{r^n}\right]k \qquad \textbf{(ix)}$$

ويضرب العلاقة الأخيرة بـــ $1/r$ - وجمعها لما قبلها نجد العلاقة التكرارية التالية :

$$(n-1)nb_n - \frac{(n-2)(n-1)b_{n-1}}{r} = nb_{n-1}k$$

وهذا يعطينا :

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n-2}{n\mathrm{r}} + \frac{k}{n-1}$$

عندما تنتهي n إلى اللانهاية نجد (x)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{r}$$

وبذلك نكون قد برهنا بأن متسلسلة القوى $\sum b_n(n-n_o)^n$ متقاربة .

ونصف قطر تقاربها r . ولكن بما أن $|Q_n| \le b_n$

فالمتسلسلة: $y = \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n||x - n_o|^n$

متقاربة لأن معاملاتها أصغر من متسلسلة متقاربة . وكذلك الأمر ، بما أن المتسلسلة المطلقة متقاربة. فالمتسلسلة الأصلية متقاربة ونصف قطر تقاربها على الأقل r . وبما أن r ، فرضاً، أصغر أو تساوي R_c فيمكن اعتبارها تساوي R_c . وعندها نقول انه يوجد للمعادلة التفاضلية حل وحيد يمكن أن يوضع على شكل متسلسلة قوى بجوار النقطة العادية $x = x_o$.

ب. <u>طريقة إيجاد الحل بجوار نقطة عادلة</u> :

لتبسيط الخطوات الجبرية نفرض أن $x_o = o$. أما إذا كانت $x_o \ne o$ فانه يمكن استخدام التعويض $z = x - x_0$ لنقل نقطة الأصل إلى النقطة $x = x_0$ ثم إيجاد الحل على صورة متسلسلة حول نقطة الأصل الجديدة على الصورة :

$$y(z) = \sum a_n z^n = a_o y_1(z) + a_1 y_2(z)$$

وعموماً يمكن سرد خطوات إيجاد الحل حول نقطة عادية $x = x_o$ كما يلي:

1. نفرض حلاً حول النقطة العادية $x = x_o$ على صورة متسلسلة قوى:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$$

2. نفاضل متسلسلة القوى حداً حداً مرتين للحصول على y'', y' :

$$, y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_o)^{n-1}$$

3. نفك كل من الدالتين المعاملين $P(x)$ و $Q(x)$ التحليليتين عند $x = x_o$ على صورة متسلسلة قوى حول $x = x_o$. ويوفر من هذه الخطوة كونهما عادة على صورة كثيرة حدود.

4. نعوض من الخطوات 1 ، 2 ، 3 في المعادلة التفاضلية . ثم نجمع قوى $(x - x_o)$ المتشابهة فنحصل على متسلسلة من الشكل:

$$\lambda_o + \lambda_1 (x - x_o)^2 + ... + \lambda_n (x - x_o)^n + ... = o$$

حيث $\lambda_o, \lambda_1, ... \lambda_n$ دوال خطية للثوابت $a_o, a_1, ..., a_n$ وبالمطابقة نجد العلاقات:

$$\lambda_o = o, \lambda_1 = o, ..., \lambda_n = o$$

وهي n+1 علاقة بين الثوابت تعين لنا الثوابت بدلالة أثنين منها.

5. نعوض الناتج في الحل المتسلسلة ثم نعيد كتابة الحل بحيث نجمع الحدود التي تحوي على a_o لنحصل على $a_o y_1(x)$ ونجمع الحدود التي تحتوي على a_1 لنحصل $a_1 y_2(x)$.

ونوضع ذلك بالأمثلة التالية .

<u>المثال -12-</u>

حل المعادلة التفاضلية على هيأة متسلسلة قوى :

$$y'' + y = o$$

الحل :

المعادلة المعطاة ذات معاملات ثابتة وحلها بطبيعة الحال معروف وهو :

$$y(x) = A\sin x + B\cos x$$

وسنحلها الآن بطريقة متسلسلة القوى . بحيث: $Q(x)=1$, $P(x)=o$ وكلتاهما تحليليتان عند x=o وهي نقطة عادية وكذلك الحال نقطة محور x . وعلى ذلك ستكون متسلسلة الحل متقاربة عند جميع قيم x . بمعنى أخر سيكون نصف قطر التقارب $R_c = \infty$.

نفرض الحل على صورة متسلسلة القوى:

$$y(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n \quad \text{و} \quad y' = \sum_{n=o}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

بالمفاضلة نحصل على : $y'' = \sum_{n=o}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

بالتعويض عن y'', y', y في المعادلة نحصل على :

$$\sum_{n=o}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n = o$$

ويمكن كتابتها على الشكل : $\sum_{n=o}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] x^n = o$

وهذه متطابقة تتحقق فقط بانعدام معاملات قوى x المختلفة على الطرف الأيسر فنحصل على :

$$n = 0,1,2,3,\dots\dots\dots \quad \text{و} \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = o$$

وهذه الصيغة تسمى الصيغة التكرارية (Recurrence relation)

وواضح من هذه العلاقة أن المعاملات ذات الدليل الزوجي تعين بدلالة a_o والمعاملات ذات الدليل الفردي تعين بدلالة a_1 . إذن :

$$a_2 = -\frac{a_o}{2.1} = -\frac{a_o}{2!} \quad , \quad a_4 = -\frac{a_2}{4.3} = +\frac{a_o}{4!} \quad , \quad a_6 = -\frac{a_4}{6.5} = -\frac{a_o}{6!}$$

وعموماً إذا كان n=2k فإن k=1,2,3,...... $a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_o$

بالمثل:

$$a_3 = -\frac{a_1}{2.3} = -\frac{a_o}{3!} \quad , \quad a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = +\frac{a_1}{5!} \quad , \quad a_7 = -\frac{a_5}{7.6} = -\frac{a_1}{7!}$$

وعموماً إذا كان $n = 2k+1$ فإن $k = 1,2,3,........$ $a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$

. وبالتالي نأخذ المتسلسلة الصورة :

$$y = a_o + a_1 x - \frac{a_o}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_o}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_o x^{2n} + \frac{(-1) a_1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + ...$$

$$= a_o \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + ... \right] + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} + ... \right]$$

$$= a_o \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

المتسلسلة الأولى هي متسلسلة تيلور للدالة $\cos x$ ، والمتسلسلة الثانية هي متسلسلة تيلور $\sin x$. إذن كما هو متوقع:

$$y = a_o \cos x + a_1 \sin x$$

ونلاحظ أن الثابتين a_1, a_o اختياريان .

المثال -13-

جد متسلسلة الحل في قوى x لمعادلة آيري (Airy's Equation)

$$y'' = xy \qquad , \qquad \infty < x < \infty$$

الحل : -

في هذه المعادلة لدينا $P(x) = o$ ، $Q = -x$ إذن x=o هـــي نقطــة عاديـــة .

نفرض الحل على الصورة . $y = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$

بالمفاضلة نحصل على :

$$y'' = \sum n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

بالتعويض من ذلك في المعادلة قيد الحل نحصل على:

$$\sum_{n=o}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^2 = x \sum a_n x^x = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

أو :

$$2.1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

وهذه المتطابقة تتحقق إذا تساوى معاملي كل من قوى x في الطرفين

إذن : $a_2 = o$

ونحصل على العلاقة التكرارية : $(n+1)(n+2)a_{n+2} = a_{n-1} \quad , \quad n = 1,2,3,........$

إذن المعامل a_{n+2} يعطي بدلالة المعامل a_{n-1} وواضح أن المعاملات يمكن أن تعيــن في ثلاث خطوات . حيث :

a_o يعين a_3 والذي هو بدورة يعين a_6 ....

a_1 يعين a_4 والذي هو بدورة يعين a_7 ....

و a_2 يعين a_5 والذي هو بدورة يعين a_8 ....

وبما أن $a_2 = o$ إذن نستنتج مباشرة أن $a_5 = a_8 = a_{11} = ... = o$

بالنسبة للمعاملات $a_o, a_3, a_6, a_9, ...$ نأخذ $n = 1,4,7,10, ...$ في العلاقة التكرارية فنجد أن:

$$a_3 = \frac{a_o}{3.2}, \quad , \quad a_6 = \frac{a_3}{6.5} = \frac{a_o}{(6.5)(3.2)} \quad , \quad a_9 = \frac{a_6}{(9.8)} = \frac{a_o}{(9.8)(6.5)(3.2)}, ...$$

ومن الأفضل يمكن كتابة علاقة a_{3n}, حيث $n =,12,3, ...$

$$a_{3n} = \frac{1}{[(3n)(3n-1)][(3n-3)(3n-4)].......[6.5][3.2]} a_o \quad , n = 1,2,3, ...$$

بالنسبة للمعاملات : $a_1, a_4, a_7, a_{10}, ...$ نأخذ $n = 2,5,8,11, ...$ فـي العلاقـة التكرارية فنجد أن :

$$a_4 = \frac{a_1}{4.3} \quad , \quad a_7 = \frac{a_4}{7.6} = \frac{a_1}{(7.6)(4.3)} \quad , \quad a_{10} = \frac{a_7}{10.9} = \frac{a_1}{(10.9)(7.6)(4.3)} \quad , ...$$

ونجد أن :

$$a_{3n+1} = \frac{1}{[(3n+1)(3n)][(3n-2)(3n-3)].......[7.6][4.3]} a_1 \quad , n = 1,2,3, ...$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية (معادلة آيري) من الصورة :

$$y=a_0\left[1+\frac{x^3}{3.2}+\frac{x^6}{6.5.3.2}+........+\frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1).......3.2}+........\right]$$

$$+a_1\left[x+\frac{x^4}{4.3}+\frac{x^7}{7.6.4.3}+..........+\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)............4.3}+........\right]$$

$$=a_n\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)........3.2}\right]+a_o\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)...4.3}\right]$$

إذن الحل العام لمعادلة آيري هو : $y=a_oy_1+a_1y_2$

حيث : $W(y_1,y_2)=1\neq o$

وهذه متسلسلة متقاربة من أجل قيم x .

المثال -14-

جد حل معادلة آيري في قوى (x-1) .

الحــل :-

النقطة x=1 هي نقطة عادية لمعادلة آيري . فنفرض الحل من الصورة :

$$y=\sum_{n=o}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

إذن :

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}=\sum_{n=o}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-1)^n$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}=\sum_{n=o}^{\infty}(n-2)(n-1)a_{n+2}(x-1)^n$$

بالتعويض عن y'', y في المعادلة نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = x\sum_{n=o}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

ويمكن كتابة x معامل y في المعادلة على صورة (x-1) أي :

$$x = 1+(x-1)$$

وهذه متسلسلة تيلور للدالة x حول النقطة x=1 .

إذن :
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = [1+(x-1)]\sum_{n=o}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n + \sum_{n=o}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1}$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=o}^{\infty}a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n$$

بمساواة معاملات نفس قوى (x-1) نحصل على:

$$\begin{aligned}
2a_2 &= a_o \quad , \\
(3.2)a_3 &= a_1 + a_o , \\
(4.3)a_4 &= a_2 + a_1 , \\
(5.4)a_5 &= a_3 + a_2
\end{aligned}$$

\- - - - - - - - - - - -

والعلاقة العامة التكرارية هي : $n \geq 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1}$

وحلها بالنسبة للمعامل a_n بدلالة a_1, a_o

$$a_2 = \frac{a_o}{2} \quad , \quad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_o}{6} \quad , \quad a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_o}{24} + \frac{a_1}{12}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_o}{30} + \frac{a_1}{120}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

إذن :

$$y = a_o\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$+ a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \ldots\ldots\right]$$

ونلاحظ في هذا المثال أن العلاقة التكرارية التي تعطي a_n بدلالة a_o و a_1 غير واضحة . في مثل هذه الحالات يمكن أن نثبت أن المتسلسلة متقاربة من أجل كل قيم x . أما y_2, y_1 فهما حلان مستقلان خطيا لمعادلة آيري. إذن :

$$y = a_o y_1 + a_2 y_2$$

هو الحل العام للمعادلة آيري من أجل : $\infty < x < \infty$.

المثال -15-

معادلة هرميت . (Hermit Eq.) هي :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = o \qquad , \quad -\infty < x < \infty$$

حيث λ ثابت موجب.

جـــد متسلسلة الحل لهذه المعادلة :

الحـــل:-

لإيجاد حل هذه المعادلة على صورة متسلسلة قوى حول النقطة العادية x=o نفرض الحل على الصورة :

$$y=\sum_{n=o}^{\infty}a_n x^n \Rightarrow y'=\sum_{n=o}^{\infty}na_n x^{n-1} \Rightarrow y''=\sum_{n=o}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$$

بالتعويض من ذلك في المعادلة قيد الحل نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=o}^{\infty}\lambda a_n x^n=o$$

أو

$$(2a_2+\lambda a_o)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+\lambda a_n]x^n=o$$

إذن : $a_2=-\frac{\lambda a_o}{2}$ والعلاقة التكرارية العامة هي:

$$a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n \qquad n\geq 1$$

وواضح من هذه العلاقة أن a_o يعين a_2 الذي هو بدورة يعين a_4 وهكذا دواليـــك.. بالمثل بالنسبة للمعاملات لقوى x الفردية التي تعين بدلالة a_1 .

وتكون متسلسلة الحل لمعادلة هرميت على الصورة :

$$y=a_o\left[1-\frac{\lambda}{2!}x^2-\frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4-\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6------\right]$$
$$+a_1\left[x+\frac{2-\lambda}{3!}x^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5+\frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7+-----\right]$$

$$= a_o y_1(x) + a_1 y_2(x).$$

كذلك يمكن أن نثبت أن المتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x.

إذا كان λ عدداً زوجياً غير سالب فتكون إحدى هاتين المتسلسلتين منتهيــة وعلــى الخصوص من أجل $\lambda = 0,2,4,6,...$ فإن إحدى حلول معادلة هرميت :

$$1 \ , \ x \ , \ 1-2x^2 \ , \ x-\frac{2}{3}x^3.$$

الحل على صورة كثير حدود يقابل $\lambda = 2n$. وبعد ضربه في عدد ثــابت يصبــح يسمى كثير حدود هرميت : $H_n(x)$.

<u>المثال -16-</u>

جد مجال تقارب متسلسلة الحل حول $x = o$ لمعادلة ليجندر:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \propto(\propto +1)y = o$$

حيث $\propto$ ثابت.

الحــل:-

نلاحظ أن المعادلة تكتب علــى الصــورة $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = o$ حيــث $P(x) = 1 - x^2$ ، $Q(x) = -2x$ ، $R(x) =\propto(\propto +1)$. وصفرا الدالة P هما ± 1 أي أن المسافة بينهما والمركز $x = o$ هي 1 إذن المتسلسلة :

$$y = \sum_n a_n x^n$$

متقاربة من أجل $|x| < 1$ على الأقل كما هو محتمل من أجل قيم x الكبرى ويمكــن أن نثبت أيضاً في حالة $\propto$ عدد موجب وصحيح أن إحــدى متسلســلتي الحــل منتهيــة وبالتالي فهي متقاربة من أجل جميع قيم x .

مثال : في حالة $\propto = 1$ ، **الحل :** هو $y = x$.

سنعود فيما بعد لدراسة هذه المعادلة .

المثال -17-

جد مجال تقارب متسلسلة الحل للمعادلة التفاضلية :

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0$$

حول النقطة $x = 0$ وحول النقطة $x = -1/2$.

الحـــل :

لدينا $P(x) = 1 + x^2$, $Q(x) = 2x$, $R(x) = 4x^2$ وتنعدم الدالـــة P مـــن أجـــل $x = i , -i$.

المسافة في المستوى المركب من o إلى $\pm i$ هي 1 ومن $-1/2$ إلى $\pm i$ هـــي : $\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

إذن في الحالة الأولى المتسلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة على الأقل من أجل $|x| < 1$. وفـــي الحالـــة الثانيـــة المتسلسلـــة $\sum b_n (x+1/2)^n$ متقاربـــة علـــى الأقـــل مـــن أجـــل $|x+1/2| < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

مـــلاحظـــة :

إذا فرضنا أن للمعادلة التفاضلية السابقة شروط ابتدائية :

$$y(0) = y_o \quad , \quad y'(0) = y'_0$$

وبما أن $1 + x^2 \neq 0$. من أجل جميع قيم x.

بناءا على نظرية وجود ووحدانية الحل فإن لهذه المعادلة حل واحد يحقـــق الشـــروط الابتدائية على المجال $-\infty < x < \infty$.

من جهة أخرى النظرية السابقة تضمن لنا حلا على صورة متسلسلة قوى $\sum a_n x^n$ من أجل : $-1 < x < 1$.

إذن الحل الوحيد على المجال $-\infty < x < \infty$. ليس له متسلسلة قوى حـــول x = 0 التي تتقارب من أجل جميع قيم x .

المثال -18-

هل يمكن تعيين متسلسلة الحل حول x = 0 . للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + (\sin x)y' + (1 + x^2 0y = 0$$

وإذا كان ممكنا فما هو نصف قطر التقارب.

الحل:

فـــي هـــذه المعادلـــة لدينـــا $Q(x) = 1 + x^2$, $P(x) = \sin x$, وبمـــا أن الدالـــة $P(x) = \sin x$ يمكن أن تكتب على شكل متسلسلة تيلور حول النقطة x = 0 وهـــي متقاربة من أجل جميع قيم x .

أيضا : الدالة $Q(x) = 1 + x^2$ يمكن أن تكتب على شكل متسلسلة تيلور حول النقطـــة x = 0 وهي متقاربة من أجل جميع قيم x .

إذن وفق النظرية السابقة فإن للمعادلة متسلسلة حل من الصورة :

$$y = \sum a_n x^n$$

حيث a_1, a_0 ثابتان اختياريان والمتسلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x .

جـ. طريقة التفاضل المتعاقب :- Successive Differentiation

يمكن أيضاً حل مسألة القيم الابتدائية.

$$y'' + P(x)y' = Q(x)y = 0 \qquad (4)$$

$$y(x_0) = a \qquad y'(x_0) = b$$

حول النقطة العادية $x = x_0$ بنفس طريقة متسلسلة القوى فنحصل على الحل العام من الصورة :

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

ثم نعوض من أحوال البداية لتعيين الثابتين الاختياريين a_1, a_0 بدلالة أحوال البداية a, b.

على أنه يمكن الحل بطريقة أخرى قد تكون ابسط في بعض الأحوال خصوصاً لتعيين المعاملات الأولى . وتعرف هذه الطريقة الأخرى بطريقة التفاضل المتعاقب (Successive Differentiation) نوجزها فيما يلي:

بما أن النقطة $x = x_0$ نقطة عادية إذن يمكن فرض الحل على هيئة متسلسلة تيلور (وهي متسلسلة قوى) على الصورة :

$$y(x) = \sum \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (5)$$

$$= y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots\dots\dots$$

حيث $y(x_0)$ و $y'(x_0)$ معروفتان من أحوال البداية. أما $y''(x_0)$ فنحصل عليها من المعادلة المعطاة بعد كتابتها على الصورة :

$$y'' = -P(x)y' - Q(x)y \qquad (6)$$

وعلية عند نقطة البداية يكون $y''(x_o) = -P(x_o)y'(x_0) - Q(x_o)y(x_o)$

نفاضل مرة أخرى لنحصل على المشتقة الثالثة ثم نعوض عند $x = x_o$

إذن :

$$y'''(x_o) = -P(x_o)y''(x_o) - \left[P'(x_o) + Q(x_o)\right]y'(x_o) - Q'(x_o)y(x_o)$$

وهكذا يمكن الحصول على المشتقات العليا عند $x = x_o$ ويوضح المثال التالي هذين الطريقين :

<u>مثال -19-</u>

حل مسألة القيم الابتدائية التالية على هيأة متسلسلة قوى حول النقطة x = 1 . وأوجد نصف قطر تقارب هذا الحل :

$$(x^2 - 2x + 2)y'' + 2(x-1)y' = 0$$

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = \frac{4}{\pi}$$

الحل :

لدينا. $P(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1} \quad , \quad Q(x) = 0$

وواضح أن $P(x)$ ، $Q(x)$ تحليليتان عند x = 1 . وبالتالي فالنقطة x = 1 . هي نقطة عادية ويمكن الحل على هيأة متسلسلة قوى x = 1 . ولحساب نصف قطر التقارب نوجد أقرب نقطة منفردة للنقطة العادية x = 1 . وواضح أن $P(x) = \infty$ إذا كان $(x-1)^2 = -1$ أي إذا كان $x = 1 \pm i$ وهاتان النقطتان المنفردتان متساويتا البعد عند النقطة x = 1 . حيث هذا البعد يساوي الوحدة . وعلى ذلك يكون $R_c = 1$

مما يعني أن متسلسلة الحل تتقارب في المجال $|x-1|<1$. وسنستخدم طريقتين للحصول على هذا الحل :

الطريقة الأولى :

ننقل المحاور إلى النقطة x = 1. عن طريق التعويض $x=t+1$ وعلى ذلك تصبح:

$$\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d^2}{dt^2} \quad , \quad \frac{d}{dx}=\frac{d}{dt}$$

وتؤول المعادلة قيد الحل إلى :

$$\left[(t+1)^2-2(t+1)+2\right]y''+2ty'=0$$

أو

$$(t^2+1)y''+2ty'=0$$

حيث الاشتقاق الآن بالنسبة إلى t . نفرض الحل على صورة متسلسلة قوى:

$$y(t)=\sum_n a_n t^n \Rightarrow y'(t)=\sum_n na_n t^{n-1} \Rightarrow y''(t)=\sum n(n-1)a_n t^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على :

$$\sum n(n+1)a_n t^n+\sum n(n-1)a_n t^{n-2}=0$$

لحساب معامل t^n نغير في المجموع الثاني $n\rightarrow n+2$ ثم نساوي هذا المعامل بالصفر لنحصل على الصيغة التكرارية:

$$n(n+1)a_n+(n+1)(n+2)a_{n+2}=0$$

إذن :

$$a_{n+2}=-\frac{n}{n+2}a_n \qquad ,n\geq 0$$

ومنه:

$$n=0 \quad : \quad a_2=0 \Rightarrow a_4=a_6=a_8=\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

$$n=1 \quad : \quad a_3=-\frac{1}{3}a_1$$

$$n=3 \quad : \quad a_5=-\frac{3}{5}a_3=+\frac{1}{5}a_1$$

$$n=5 \quad : \quad a_7=-\frac{5}{7}a_5=-\frac{1}{7}a$$

إذن :

$$y(t)=a_o+a_1(t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\ldots\ldots..)$$

أو

$$y(x)=a_o+a_1\left[(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{5}(x-1)^5-\frac{1}{7}(x-1)^7+\ldots\ldots..\right]$$

لتعيين الثابتين الاختياريين a_1, a_o نستدعي أحوال البداية :

$$y(1)=a_o+a_1[0]=a_o\equiv 1 \qquad \Rightarrow a_o=1$$

$$y'(x)\big|_{x=1}=a_1\left[1-(x-1)^2+(x-1)^4-(x-1)^6+\ldots\ldots.\right]_{x=1}=a_1\equiv\frac{4}{\pi}\Rightarrow a_1=\frac{4}{\pi}$$

إذن

$$y(x)=1+\frac{4}{\pi}\left[(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{5}(x-1)^5-\frac{1}{7}(x-1)^7+\ldots\ldots\right]$$

الطريقة الثانية :

بما أن $x=1$ نقطة عادية. إذن نفرض حلاً للمعادلة التفاضلية على هيـــأة متسلســلة تيلور حول نقطة البداية $x=1$.

$$y(x) = \sum \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

حيث من أحوال البداية $y(1) = 1$ ، $y'(1) = \frac{4}{\pi}$. أما الثابت الأخر $y^{(n)}(1)$ فنحصل عليها كما يلي: نعوض من أحوال البداية في المعادلة المعطاة حيـــث : $y(1) = 1$ ، $y'(1) = \frac{4}{\pi}$:

$$(1-2\times1+2)y''(1) = 2(1-1)\frac{4}{\pi} \Rightarrow y''(1) = 0$$

نفاضل المعادلة المعطاة :

$$(x^2-2x+2)y''' + (2x-2)y'' + 2(x-1)y'' + 2y' = 0$$

إذن : $$(1-2+2)y'''(1) + (2-2)y''(1) + 2(1-1)y''(1) + 2y'(1) = 0$$

إذن : $$y'''(1) = -2y'(1) = -8/\pi$$

نفاضل مرة أخرى بغية الحصول على المشتقة الرابعة فنجد أن $y^{(4)}(1) = 0$ ومـــرة أخرى للحصول على المشتقة الخامسة فنجد أن $y^{(5)}(1) = 96/\pi$ وهكذا .... لتكـــون متسلسلة تيلور الحل هي:

$$y(x) = 1 + \frac{4}{\pi}(x-1) - \frac{8}{3!\pi}(x-1)^3 + \frac{96}{5!\pi}(x-1)^5 - \dots\dots\dots\dots$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi}\left[(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \dots\dots\dots\right]$$

وواضح أن طريقة متسلسلة تيلور تكون أبسط إذا أردنا الحصول فقط علـــى الحـــدود الأولى من المتسلسلة لكنها تطول إذا أردنا حساب الحدود العليا.

مــــلاحظـــــة:

المعادلة التفاضلية قيد الحل هي معادلة خطية من المرتبة الأولى في y' ويمكن حلـــها بالطرق المعتادة لنحصل على :

$$y(x) = A + B\tan^{-1}(x-1)$$

والتي تصبح تحت أحوال البداية:

$$y(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\tan^{-1}(x-1)$$

ومعروف أن مفكوك تيلور للدالة $\tan^{-1}(x-1)$ حول x = 1 . أي مفكـــوك تيلــور للدالة $\tan^{-1} t$ حول t = 0 . هو :

$$\tan^{-1} t = t - 1\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + ...\ , \quad |t| < 1$$

5- ويمكن توسيع النظرية السابقة لتشمل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad \text{(i)}$$

نظرية -2-

إذا كانت الدوال $P(x)$ ، $Q(x)$ ، $R(x)$. دوال تحليلية عند النقطة $x = x_o$ فإن كل حل للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (i) يكون تحليليا عند $x = x_o$ ، و يمكن بالتالي تمثيله بمتسلسلة قوى في $(x - x_o)$ على الصورة :

$$y = \sum_n a_n (x - x_o)^n \qquad (7)$$

بنصف قطر تقارب $R_c > 0$ يساوي المسافة بين النقطة العادية $x = x_0$ واقرب نقطـــة منفردة تكون عندها أي من الدوال $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ غير تحليلية .

وتتبع نفس الخطوات المتعلقة بحل المعادلة المتجانسة مع تعديل بسيط هو فك الدالـــــة التحليلية $R(x)$ في الطرف الأيمن على هيأة متسلسلة قوى في $(x = x_o)$ ثم مســـاواة معاملات القوى $(x - x_o)$ المتشابهة على الطرفين .

ويكون الحل العام على الصورة :

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) + y_3(x) \qquad (8)$$

حيث $y_h(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ هو الحل المتجانس ؛ $y_3(x)$ هو حل خـــاص.

ويوضح ذلك المثال التالي :

مثال -20-

حل المعادلة التفاضلية التالية حول $x = 0$ على هيأة متسلسلة قوى :

$$y'' - xy' = e^{-x}$$

الحل :-

لدينا :

$$P(x) = -x \ , \ Q(x) = 0 \ , \ R(x) = e^{-x} = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

وكلها دوال تحليلية عند جميع قيم x بما فيها $x = 0$. وعلى ذلك يكون الحل علـــى هيأة متسلسلة قوى تتقارب لجميع قيم x . إذن :

$$y(x) = \sum a_n x^n \Rightarrow y' = \sum n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\sum n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum n a_n x^{n-1} = \sum \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

أو

$$\sum n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum n a_n x^n = \sum \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

ويلاحظ أننا مثلنا الدالة e^{-x} بمتسلسلة تيلور حول $x=0$.

بمساواة معامل x^n على الطرفين وذلك بعد تغيير $n \to n+2$ في المجمـــوع الأول في الطرف الأيسر فنحصل على :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

وتكون الصيغة التكرارية من الشكل :

$$a_{n+2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)}a_n + \frac{(-1)^n}{(n+2)(n+1)(n!)} \quad , \quad n \geq 0$$

ومنهـــــا :

$$n=0 \quad , \quad a_2 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n=1 \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2.3}a_1 - \frac{1}{2.3} = \frac{a_1}{6} - \frac{1}{6}$$

$$n=2 \quad , \quad a_4 = \frac{2}{3.4}a_2 + \frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{8}$$

$$n=3 \quad , \quad a_5 = \frac{3}{4.5}a_3 - \frac{1}{6.5.4} = \frac{a_1}{40} - \frac{1}{30}$$

ويكون الحل كمايلي :

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 + (\frac{a_1}{6} - \frac{1}{6})x^3 + \frac{1}{8}x^4 + (\frac{a_1}{40} - \frac{1}{30})x^5 + \ldots$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 \left[x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \ldots \right] \right\} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \ldots$$

المقدار بين قوسين {...} هو الحل المتجانس بينما المتسلسلة الأخيرة تمثل حلاً خاصاً

IX ـ 3 الحل في متسلسلة فروبنيوس بجوار نقطة منفردة منتظمة :
Solutions in Frobenius series about a Regular Singular Point

لا تصلح متسلسلة القوى حلاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة حول إحدى نقطها المنفردة المنتظمة حيث لا تحقق هذه المتسلسلة هذه المعادلة حول أمثال هذه النقط ، وستقتصر دراستنا على إيجاد الحل على هيأة متسلسلة وهي تعديل لمتسلسلة القوى بإتاحة إمكانية وجود قوى سالبة أو غير صحيحة بحيث تصلح حلاً للمعادلة التفاضلية حول النقطة المتفردة المنتظمة وتعرف متسلسلة القوى المعدلة بتسلسله فروينوس (Frobenius Series) .

نظرية -3-

إذا كانت $x = x_0$ نقطة منفردة منتظمة للمعادلة التفاضلية الخطية :

$$L[y] = y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (9)$$

فأنه يوجد على الأقل حل واحد على صورة متسلسلة فروبنيوس لهذه المعادلة :

$$y(x) = (x - x_0)^{\alpha} \sum a_n (x - x_n)^n \qquad (10)$$

حيث أن $\sum a_n(x-x_0)^n$ متقاربة على المجال $O<|x-x_0|<R_c$

البرهان :

لإثبات النظرية فإنه يستلزم تعيين :

1- قيم $\propto$ التي من اجلها يكون للمعادلة (9) حلاً من الصورة (10)

2- الصيغة التكرارية للمعاملات a_n

3- نصف تقارب المتسلسلة $\sum a_n(x-x_0)^n$

سنفرض للسهولة فقط ؛ أن النقطة المنفردة هـي $x=x_0=0$ وإذا لـم يكـن مبـدأ الإحداثيات النقطة المنفردة ننقل المحاور إليها بعملية الانسحاب وذلك بأخذ :

$$X=x-x_0 \qquad \text{(i)}$$

فتكون النقطة المنفردة $X=0$

من الفرض لدينا النقطة $x_0=0$ نقطـة منفـردة منتظمـة . إذن الدالتـان $xP(x)$, $x^2Q(x)$ تحليليتان عند $x=0$ وبالتالي يمكن تمثيلهما بمتسلسلتي قـوي على الصورة :

$$xP(x)=\sum \rho_n x^n \quad , \quad x^2Q(x)=\sum q_n x^n \qquad \text{(ii)}$$

وهاتان المتسلسلتان متقاربتان في مجال ما . وليكن R_c أصغر مجـالي التقـارب .

لنفرض أن للمعادلة حلاً من الشكل :

$$y(x)=x^{\propto}\sum a_n x^n \qquad \text{(iii)}$$

حيث $a_o\neq 0$, $\propto$, a_1 , a_2 ,..., a_n ثوابت .

يمكن وضع الحل على الشكل :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\propto}$$

وبالاشتقاق نجد :

$$y' = \sum (n+\propto) a_n x^{n+\propto-1}$$

$$y'' = \sum (n+\propto)(n+\propto-1) a_n x^{n+\propto-2}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$L[y] = \sum (n+\propto)(n+\propto-1) a_n x^{n+\propto-2} + x^{-1}\left[\sum \rho_n x^n\right]\left[\sum (n+\propto) a_n x^{n+\propto-2}\right]$$

$$+ x^{-2}\left[\sum q_n x^n\right]\left[\sum a_n x^{n+\propto}\right] = 0$$

بإجراء عمليتي ضرب المتسلسلات ثم تجميع حدود قوى x المتشابهة نحصل على :

$$\left[\propto(\propto-1) + \propto \rho_0 + q_0\right] a_0 x^{\propto-2}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+\propto)(n+\propto-1) a_n + \sum_{m=0}^{n} \left[(\propto+m)\rho_{n-m} + q_{n-m}\right] a_m \right\} x^{n+\propto-2} = 0 \quad \textbf{(iv)}$$

وهذه تتحقق عندما تنعدم معاملات القوى المختلفة لـــ x وبالتالي نجد العلاقتين:

$$\left[\propto(\propto-1) + \propto \rho_0 + q_0\right] a_0 = 0 \qquad \textbf{(v)}$$

$$(n+\propto)(n+\propto-1) a_n = -\sum_{m=0}^{n} \left[(\propto+m)\rho_{n-m} + q_{n-m}\right] a_m \qquad \textbf{(vi)}$$

وحيث أن $a_0 \neq 0$ فرضاً . إذن العلاقة **(v)** تصبح :
أو

$$\propto (\propto -1)+ \propto \rho_0 + q_0 = 0 \qquad \textbf{(vii)}$$

$$\propto^2 -(1-\rho_0) \propto + q_0 = 0$$

وتسمى هذه العلاقة بالمعادلة الآسية (Indicial Equation) للمعادلة التفاضلية المعطاة وهي علاقة من الدرجة الثانية في الأس $\propto$ ، وعموماً لهذه المعادلة جذران $\propto_1, \propto_2$ يمكن تعيينهما بدلالة ρ_0, q_0 أي بدلالة خصائص الدالتين $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$
وسنعتبر دائماً أن الجذر الآسي الأكبر هو $\propto_1$ أي $\propto_1 \geq \propto_2$.
أما العلاقة (vii) فتعطي الصيغة التكرارية التالية :

$$[(n+\propto)(n+\propto -1)+(n+\propto)p_o + q_o]a_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m [(\propto + m)p_{n-m} + q_{n-m}] = 0$$

$; \; n \geq 1$ **(viii)**

ولتبسيط هذه الصيغة نرى أن معامل a_n يمكن كتابته على الصورة :

$$(n+\propto)(n+\propto -1)+(n+\propto)p_o + q_o = n[n+2\propto -(1-\beta)]$$

وذلك يأخذ بعين الاعتبار المعادلة الآسية ولدينا من المعادلة الآسية أيضا:

$$\propto_1 + \propto_2 = 1-\rho_o$$

إذن معامل a_n يكتب على الشكل : $n(n+2\propto - \propto_1 - \propto_2)$

وبالتالي تصبح الصيغة التكرارية على الصورة :

$$n(n+2\propto-\propto_1-\propto_2)a_n+\sum_{m=0}^{n-1}a_m\left[(\propto+m)p_{n-m}+q_{n-m}\right]=0 \qquad \textbf{(viii)}$$

وللحصول على معاملات الحل الأول للمعادلة نضع كل $\propto_1$ بدل $\propto$ لنجـــد الصيغـــة التكرارية :

$$n(n+\propto_1-\propto_2)a_n+\sum_{m=0}^{n-1}a_m\left[(\propto_1+m)p_{n-m}+q_{n-m}\right]=0 \qquad \textbf{(ix)}$$

وبوضع (x) $\quad \propto_1-\propto_2=\delta$

تصبح الصيغة التكرارية للحل الأول:

$$n(n+\delta)a_n+\sum_{m=0}^{n-1}a_m\left[(\propto_1+m)p_{n-m}+q_{n-m}\right]=0 \qquad \textbf{(xi)}$$

وهي علاقة خطية بين المعاملات $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ وتعين هذه المعـــاملات بدلالة a_o ، ثم بالتعويض في الحل المفروض نحصل على متسلســـلة الحـــل الأول. ولكن هذه المتسلسلة لا تمثل شيئا إلا إذا كانت متقاربة. ولنبرهن الآن أنها متقاربة.

بما أن المتسلسلة $|x||P(x)|$, $|x^2||\phi(x)|$ متقاربتان من أجل $|x|<R_c$.

فإن لكل من هاتين المتسلسلتين قيمة محدودة في هذا المجال. لتكن K قيمة محـــدودة وأكبر من هاتين القيمتين في المجال $|x|<r$ حيث $r\le R_c$:

لنأخذ المتسلسلتين :

$$\begin{aligned} xP(x) &= p_o+p_1x+p_2x^2+.......... \\ x^2Q(x) &= q_o+q_1x+q_2x^2+............ \end{aligned} \qquad \textbf{(xii)}$$

وبأخذ القيم المطلقة للحدود نجد :

$$|x||P(x)| \le |p_0| + |p_1||x| + |p_2||x^2| + \ldots + |p_n||x^n| + \ldots$$

$$|x||Q(x)| \le |q_0| + |q_1||x| + |q_2||x^2| + \ldots\ldots\ldots\ldots + |q_n||x^n| + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ومن أجل : $|x| = r$ نجد أن:

$$\sum |p_n| r^n \le K \qquad \textbf{(xiii)}$$
$$\sum |q_n| r^n \le K$$

وبالتالي : $|p_n| \le \frac{K}{r^n}$, $|q_n| \le \frac{K}{r^n}$

وبأخذ القيم المطلقة لحدود الصيغة التكرارية والتعويض بالعلاقة (xiii) نجد:

$$n(n+\delta)|a_n| \le \sum_{m=0}^{n-1} |a_m| (\propto_1 + m + 1) \frac{K}{r^{n-m}} \qquad \textbf{(xiv)}$$

وإذا أخذنا متسلسلة معاملاتها b_n تحقق العلاقة :

$$n(n+\delta) b_n = \sum_{m=0}^{n-1} b_m (\propto_1 + m + 1) \frac{K}{r^{n-m}} \qquad \textbf{(xv)}$$

ويكون :

$$b_n \ge |a_n|$$

حيث الصيغة التكرارية لمعاملات b_n هي:

$$n(n+\delta) b_n = \frac{(n-1)(n-1+\delta) b_{n-1}}{r} + \frac{K(n + \propto_1) b_{n-1}}{r}$$

والذي يعطي :

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(n-1)(n-1+\delta)}{n(n+\delta)r} + \frac{K(n+\propto_1)}{n(n+\delta)r}$$

إذن :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{r} \qquad \text{(xvi)}$$

أي أن نصف قطر تقارب المتسلسلة S حيث :

$$S = \sum b_n x^n$$

هـــو r .

وبما أن $|a_n| \leq b_n$ إذن المتسلسلة $\sum a_n x^n$ متقاربة أيضاً ونصف قطر تقاربها ليس أصغر من r . وبما أن r هي أصغر أو تساوي R_c إذن المتسلسلة متقاربة من أجل $|x| < R_c$ وبهذا نكون قد عينا إحدى حلي المعادلة المعطاة.

$$y_1(x) = x^{\propto_1} \sum a_n(\propto_1) x^n \qquad \text{(xvii)}$$

أما لتعيين الحل الثاني نعوض في الصيغة التكرارية كل $\propto_2$ بدل $\propto$:

$$n(n-\delta)a_n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \left[(m+\propto_2)p_{n-m} + q_{n-m}\right] = 0 \qquad \text{(xviii)}$$

وهنا نميز ثلاث حالات رئيسية الأولى كون δ عدداً غير صحيح. والثانية كون δ عدداً صحيحاً والثالثة كون δ معدوماً .

الحالة الأولى: δ عدد غير صحيح $\propto_1 - \propto_2 = \delta \neq$ Positive Integer :

في هذه الحالة ، يختلف جذرا المعادلة الآسية بقيمة لا تساوي عدداً صحيحاً أي أن $\propto_1 - \propto_2 = \delta \neq$ Positive Integer .

في هذه الحالة يناظر الجذر الآسي $\propto_2$ متسلسلة الحل على نمـط متسلسـلة الحـل الأول:

$$y_2(x) = x^{\propto_2} \sum a_n(\propto_2)x^n \qquad \textbf{(xix)}$$

وواضح أن الحل $y_2(x)$ مستقل خطيا عن الحل $y_1(x)$ لأن النسبة بينها لا يمكـن أن تساوي ثابتا بأي حال من الأحوال طالما تحقق الشرط $\propto_1 - \propto_2 = \delta \neq \text{Integer}$.

الحالة الثانية :- δ عدد صحيح $\propto_1 - \propto_2 = \delta = N$

في هذه الحالة لا ينعدم معامل a_n في الصيغة التكراريـة (xviii) طالمـا $n < \delta$.

ولكن عندما $n = \delta$ نميز حالتين:

أولاهما:

أن يكون الحد الثاني في الصيغة التكرارية معدوما. وعندها تصبح a_δ غـير معينـة فنختارها صفرا ونوجد بقية الثوابت بدلالتها وبذلك نحصل على الحل الثاني للمعادلة.

ثانيتهما:

أن يكون الحد الثاني للصيغة التكرارية غير معـدوم وعندهـا تصبـح a_δ مسـاويه اللانهاية. وبالتالي تصبح بقية المعاملات a_n من أجل $n > \delta$ مسـاوية اللانهايـة أيضا. وهـذا يعنـي بـأن فرضنـا للحـل علـى شـكل متسلسـلة مـن النـوع $y = x^{\propto} \sum a_n x^n$ خاطئ. ولا يوجد حل ثاني من هذا الشكل.

ولمعرفة الحل الثاني نلجأ لتخفيض مرتبة المعادلة بعد معرفة حل خاص لها وهو:

$$y_1 = x^{\propto_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\propto_1)x^n$$

وبإجراء تغيير في الدالة كما يلي:

$$y = y_1 Z$$

تصبح المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+\left[2\frac{y_1'}{y_1}+P(x)\right]\frac{dZ}{dx}=0$$

والتي حلها كما وجدنا في الفصل السابع هو:

$$Z=A+B\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^{\,2}}dx$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو :

$$y=Ay_1(x)+By_2(x)$$

حيث :

$$y_2=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1 2}dx$$

ولإجراء هذا التكامل ومعرفة شكل هذا الحل نتبع الخطوات التالية :

بما أن $\propto_1,\propto_2$ جذرا للمعادلة الأسية إذن:

$$\propto_1+\propto_2=1-p_o$$
$$\propto_1-\propto_2=\delta$$

ومنه إذن :
$$p_o=1+\delta-2\propto_1$$

ولدينا:
$$e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int(p_o+p_1x+.......)\frac{dx}{x}}$$

أو :
$$e^{-\int \underline{p}(x)dx}=e^{-\int(2\propto_1-1-\delta)\frac{dx}{x}}e^{-\int(p_1+p_2x+........)dx}$$

$$x^{2\alpha_1-1-\delta}.e^{-\int(p_1+p_2x+.........)dx}$$

والحل الثاني يصبح على الشكل:

$$y_2 = y_1\int\frac{x^{2\alpha_1-1-\delta}e^{-\int(p_1+p_2x+..........)dx}}{x^{2\alpha_1}\left[\sum a_n(\alpha_1)x^n\right]^2}$$

واختصارا نكتبه على الشكل :

$$y_2 = y_1\int\frac{g(x)}{x^{1+\delta}}dx$$

حيث :

$$g(x) = \frac{e^{-\int(p_1+p_2x+..........)dx}}{(a_o+a_1x+a_2x^2+.........)^2}$$

وهي دالة تحليلية عند النقطة x = 0 لأن $a_o \neq o$ فرضاً . وبالتالي يمكن كتابتها على شكل متسلسلة قوى:

$$g(x) = \sum g_n x^n$$

حيث $$g_0 = \frac{1}{a_0^{\,2}} \neq 0$$

وبالتعويض نجد الحل الثاني:

$$y_2 = y_1\int x^{-1-\delta}\sum_n g_n x^n dx$$

$$= y_1\int\sum_n g_n x^{n-1-\delta}dx$$

إذا لاحظنا أن معاملات g_n عندما $n=\delta$ هي $\frac{1}{x}$ وتكاملها $\ln x$ فإن y_2 يكتب على الشكل :

$$y_2 = y_1\left[\sum_{n=0}^{\delta-1}\frac{g_n}{n-\delta}x^{n-\delta} + g_n \ln|x| + \sum_{n=\delta+1}^{\infty}\frac{g_n}{n-\delta}x^{n-\delta}\right]$$

$$y_2 = g_\delta y_1(x)\ln|x| + x^{\propto_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\propto_2)x^n \qquad \textbf{(xx)}$$

وهنـــا كما نرى فإن الحل الثاني يحتوي على الحد $\ln|x|$ وهو غير قابل للنشر بجوار $x=0$.

ونستنتج من ذلك أن الحل الثاني يحتوي علـــى $\ln|x|$ إذا كـــانت $g_\delta \neq 0$ ، أمـــا إذا كانت $g_\delta = 0$ فالحل لا يحتوي على $\ln|x|$ وعندها يكون الحل على شكل متسلسلة نحصل عليها بتعويض $\propto_2$ بدل $\propto$ في الصيغة التكرارية .

أما إذا كانت g_δ غير معدومة فالحل لا يعطى بشكل المتسلسلة المفروضة لاحتوائـــه على $\ln|x|$. وعندها نبحث عن الحل الخاص الثاني بطريقة التخفيض .

الحالة الثالثة : $\propto_1 - \propto_2 = \delta = 0$ أي $\propto_1 = \propto_2$

في حالة تساوي جذرا المعادلة الأسية يكون: $(p_o - 1)^2 - 4q_0{}^2 = 0$

وعندئذ يكون الجذر المزدوج هو:

$$\propto_1 = \propto_2 = \frac{1}{2}(1-p_0)$$

في هذه الحالة لا يؤدي الجذر الثاني $\propto_1 = \propto_2$ إلى حل جديد يختلف عن $y_1(x)$.

ولا بد من تعديل تقنية الحل بحيث نحصل على حل جديد $y_2(x)$ مستقل خطياً عـــن $y_1(x)$.

ونعود مرة أخرى إلى المتطابقة (iv).

$$L[y]=[\propto(\propto-1)+\propto p_o+q_o]a_o x^{\propto-2}+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+\propto)(n+\propto-1)a_n+\sum_{m=0}^{\infty}[(\propto+m)p_{n-m}+q_{n-m}]a_m\right\}x^{n+\propto-2}=0$$

نرجئ إلى حين مساواة معامل أدنى قوة $x^{\propto-2}$ بالصفر [تلك المساواة التي تؤدي إلى المعادلة الآسية] نبدأ بمساواة القوة التالية $x^{\propto-1}$ فنحصل على :

$$a_1=-\frac{p_1\propto+q_1}{\propto(\propto+1)+p_o(\propto+1)+q_o}a_o=F_1(\propto)a_o$$

بمساواة معامل القوة $x^{\propto}$ بالصفر نحصل على a_2 بدلالة $\propto,a_1,a_o$ ثم بالتعويض عن a_1 بدلالة a_o من العلاقة السابقة يمكن كتابة العلاقة $\propto,a_o,a_2$ على الصورة :

$$a_2=F_2(\propto)a_o$$

وعموماً يمكن كتابة العلاقة بين المعامل a_m والمعامل a_o على الصورة :

$$a_m=F_m(\propto)a_o$$

ويمكن كتابة متسلسلة الحل (متسلسلة فروبنيوس) على الصورة :

$$y(x,\propto)=a_o x^{\propto}[1+F_1(\propto)x+F_2(\propto)x^2+.......]$$

$$=a_o x^{\propto}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}F_m(x)x^m\right]$$

وعند التعويض بهذه الدالة $y(x,\propto)$ ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية فإن كل الحـدود في الطرف الأيسر ستنعدم إلا الحد الذي يحتوي على $x^{\propto-2}$ (أدنى قوة).
وبالتالي نحصل على :

$$L(y)=L[y(x,\propto)]=a_0[\propto(\propto-1)+\propto p_o+q_o]x^{\propto+2}$$

أو

$$L[y(x,\propto)]=a_o(\propto^2+(p_o-1)\propto+q_o)x^{\propto-2}$$

ونفس الشيء نحصل عليه من المتطابقة السابقة (xx) بمساواة جميع معاملات قوى x بالصفر عدا معامل أدنى قوة $x^{\propto-2}$.
وحيث أننا بصدد جذر مزدوج للمعادلة الآسية فإنه يمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة (xxi) على الصورة :

$$L[y(x,\propto)]=(\propto-\propto_1)^2a_0x^{\propto-2} \qquad \textbf{(xxii)}$$

حيث $\propto_1$ هو الجذر المزدوج للمعادلة الآسية ويعطى بالعلاقة :

$$\propto_1=\frac{1}{2}(1-\rho_o)$$

والآن نريد أن نبحث عن الدالة $y(x)$ التي تحقق المعادلة التفاضلية :

$$.\,L[y]=0$$

واضح أن الدالة $y_1=y(x,\propto_1)$ التي نحصل عليها من العلاقة :

$$y(x,\propto)=a_0x^{\propto}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}F_m(\propto)x^m\right] \qquad \textbf{(xxiii)}$$

وبوضع $\propto=\propto_1$ نجعل الطرف الأيمن في العلاقة (xxii) منعدماً وبالتـالي تتحقـق المعادلة التفاضلية $L[y]=0$.

فيكون الحل الأول لهذه المعادلة التفاضلية هو $y_1=y(x,\propto_1)$.

$$y_1(x)=x^{\propto_1}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}F_m(\propto_1)x^m\right] \quad \text{حيث} \quad a_o=1$$

نبحث الآن عن حل أخر $y_2(x)$ يحقق المعادلة $L[y]=0$. بوضـــع $a_o=1$ فـــي المعادلة (xxii) ثم نفاضل الطرفين جزئياً بالنسبة إلى $\propto$ على اعتبار أن $y(x,\propto)$ دالة من متغيرين مستقلين $\propto,x$ وبالتالي فتبادل التفاضل بينهما قائم أي أن :

$$\frac{\partial}{\partial x}L[y(x,\propto)]=\frac{\partial}{\partial x}[y''+p(x)y'+q(x)y]=L\left[\frac{\partial}{\partial\propto}y(x,\propto)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial\propto}\left[(\propto-\propto_1)^2x^{\propto-2}\right]=2(\propto-\propto_1)x^{\propto-2}+(\propto-\propto_1)^2x^{\propto-2}\ln|x|$$

وواضح أن الطرف الأيمن لهذه المعادلة ينعدم أيضاً بوضع $\propto=\propto_1$ ممـــا يعنـــي أن الدالة $y_2(x)$ حيث :

$$y_2(x)=\left.\frac{\partial y(x,\propto)}{\partial\propto}\right|_{\propto=\propto_1}$$

$$=y_1(x)\ln|x|+x^{\propto_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\propto_1)x^n \qquad \textbf{(xxv)}$$

هي أيضا حل للمعادلة التفاضلية $L[y]=0$.

2- الطريقة العملية لإيجاد الحل بجوار نقطة متغيرة منتظمة.

لقد أثبتنا فيما سبق وجود حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية بجوار نقطة منفــــردة منتظمة ونلخص خطوات العمل لإيجاد هذين الحلين فيما يلي:

1- نفرض أن للمعادلة حلا من الشكل: $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\infty}$

حيث $o\neq a_0$ ونعوض في المعادلة التفاضلية, ثم نوجد المعادلـــــة الآســية والصيغــة التكراريـــــة .

2- نحل المعادلة الآسية ونوجد الجذرين ∞_2,∞_1 حيث $\infty_1\geq\infty_2$ ، ثــــم نعــوض الجذر الأكبر ∞_1 في الصيغة التكرارية ونوجد الحل الأول بدلالة ثابت اختياري.

3- إذا كان الفرق بين ∞_2,∞_1 عددا غير صحيح ، نعوض ∞_2 بالصيغة التكراريـــــة ونستنتج الحل الثاني.

4- إذا كان الفرق بين ∞_2,∞_1 عددا صحيحا، نعوض ∞_2 بالصيغة التكرارية ونوجد المعاملات $a_2,a_1,........$ حتى a_δ فإذا كانت جميعها معينة حتى a_δ فــــإن $a_{\delta+2},a_{\delta+1},......$ تصبح معينة وبالتالي نستنتج الحل الثاني.

إما إذا كانت a_δ غير محددة نلجأ إلى طريقة تخفيض المعادلة بعــد معرفــة الحـــل الأول أو نستخدم الطريقة المبينة في المثال -22-.

5- إذا كانت $\infty_1=\infty_2$: في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

أ- نحسب قيمة الجذر المزدوج $\infty=\infty_1=\frac{1}{2}(1-\rho_o)$.

ب- نستخدم طريقة فروبنيوس لإيجاد الدالة $y(x,\infty)$ (xxiii).

ج- نضع $\infty=\infty_1$ في $y(x,\infty)$ لنحصل على الحل الأول $y_1(x)$:

$$y_1(x)=y(x,\infty)\Big|_{\infty=\infty_1}$$

د- نفاضل $y(x,\propto)$ جزئياً بالنسبة إلى $\propto$ ثم نحسب قيمة هذه المشتقة الجزئية عند $\propto=\propto_1$ فتكون هي الحل الثاني $y_2(x)$:

$$y_2(x)=\frac{\partial y(x,\propto)}{\partial \propto}\Big|_{\propto=\propto_1}$$

ويكون الحل العام للمعادلة $L[y]=0$ من الصورة :

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$$

ملاحظات :-

1- الحلان $y_2(x),y_1(x)$ مستقلان خطيا لان النسبة بينهما ليست ثابتة بل تعتمد على x ويمكن التحقق من عدم انعدام الرونسيكان لها تطابقياً .

2- يمكن وضع الحل الثاني $y_2(x)$ على الصورة :-

$$y_2(x)=y_1(x)\ln|x|+x^{\propto}\sum b_n(\propto_1)x^n$$

حيث المعاملات b_n تختلف عموما عن المعاملات a_n التي تقابل $\propto=\propto_1$

3- يمكن بالتعويض عن هذا الحل الثاني ومشتقاته في المعادلة التفاضلية ، تعين المعاملات b_n . ونلاحظ أن الحدود المضروبة في $\ln|x|$ تلاشي بعضها البعض.

4- لحل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة $L(y)=y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ حول نقطة متفردة منتظمة للمعادلة $L[y]=0$ نوجد الحل المتجانس $y_h(x)$ باستخدام طريقة فروبنيوس حسب طبيعة جذري المعادلة الآسية ثم نستخدم طريقة لاغرانج لتغير البارومترات لحساب الحل الخاص $y_p(x)$.

5- لقد وجدنا انه عندما تكون $x_0=0$ نقطة متفردة منتظمة فان المعادلة التفاضلية تكتب على الصورة :-

$$y'' + \frac{1}{x}\left(\sum_n \rho x^n_n\right)y' + \frac{1}{x^2}\left(\sum q_n x^n\right)y = 0$$

وبضرب الطرفين في x^2 نجـد :-

$$x^2 y'' + x\left[\sum \rho_n x^n\right]y' + \left[\sum q_n x^n\right]y = 0 \qquad (11)$$

وهي تشبه معادلة اويلر Euler ، أوان معادلة حالة خاصة منها وذلك عندما تكون:

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots\dots\dots = \rho_n = 0, q_1 = q_2 = \dots\dots\dots = q_n = 0$$

أي :

$$x^2 y'' + \rho_0 x y' + q_0 y = 0 \qquad (12)$$

6- من شكل حل المعادلة نلاحظ انه إذا كانت $\propto_2, \propto_1$ عددين صحيحين موجبيـــن ، وكان الحل لا يحتوي علي $\ln|x|$ فالنقطة $x = 0$ تكون نقطة عادية للحل العـــام رغم كونها منفردة بالنسبة للمعادلة التفاضلية .

بينما إذا كان كل من $\propto_2, \propto_1$ أو كليهما عددا غير صحيح أو كان الحل العام يحتــوي على $\ln|x|$ فالنقطة $x_0 = 0$ هي نقطة منفردة للحل العام ، علماً بأنها أيضاً منفــردة للمعادلة التفاضلية .

نستنتج من ذلك مايلي :-

إذا كانت النقطة x_0 نقطة منفردة للحل العام فهي أيضا منفردة للمعادلة التفاضليـــة ، أما إذا كانت النقطة منفردة بالنسبة للمعادلة التفاضلية فليست بالضرورة أن تكـــون منفردة للحل العام .

7- لا يمكن الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية بجوار نقطة منفـــردة غـــير منتظمة بطريقة المتسلسلات .

3- أمثلة مختلفة محلوله

مثال -21- : الحالــة الأولــى :-

حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$2x^2y'' - xy' + (1 - x^2)y = 0$$

لدينا :
$$P(x) = -\frac{x}{2x^2} = -\frac{1}{2x} \quad , Q(x) = \frac{1 - x^2}{2x^2}$$

واضــح أن $x = 0$ نقطـــة منفــردة منتظمـــة لان كـــل مـــــن $xP(x) = -\frac{1}{2}$ و $x^2 Q(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ دالة تحليلية عند $x = 0$ نفرض حلا على الصورة :

$$y = x^{\propto} \sum Q_n x^n = \sum Q_n x^{n+\propto} \qquad , \ Q_0 \neq 0$$

إذن :

$$y' = \sum (n + \propto) Q_n x^{n+\propto-1} \qquad , \ y'' = \sum (n + \propto)(n + \propto - 1) Q_n x^{n+\propto-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على :-

$$2x^2 \sum (n + \propto)(n + \propto - 1) Q_n x^{n+\propto-2} - x \sum (n + \propto) Q_n x^{n+\propto-1} + (1 - x^2) \sum Q_n x^{n+\propto} = 0 \qquad (i)$$

بتجميع حدود القوى المتشابهة والقسمة على $x^{\propto}$ نحصل على :-

$$\sum [2(n + \propto)(n + \propto - 1) - (n + \propto) + 1] Q_n x^n - \sum Q_n x^{n+2} = 0$$

للحصول على المعادلة الآسية نساوي معامل اصغر قوة (x^0) بـــالصفر ونذكـــر أن $Q_0 \neq 0$

$$2 \propto (\propto -1) - \propto +1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

بمساواة معامل x^n بالصفر :-

$$[2(n+\propto)(n+\propto -1) - (n+\propto) + 1]Q_n - Q_{n-2} = 0$$

أو

$$Q_n = \frac{1}{(n+\propto -1)(2n+2\propto -1)} Q_n - 2 \quad : n \geq 0$$

أو

$$Q_{n+2} = \frac{1}{(n+\propto +1)(2n+2\propto +3)} Q_n \qquad n \geq 0 \qquad \text{(iii)}$$

وهذه هي الصيغة التكرارية والتي تعطي المعاملات الزوجيـــة Q_4, Q_2 ، ... بدلالـــة المعامل $Q_0 \neq 0$ كما تعطي المعاملات الفردية Q_5, Q_3 ، ... بدلالة المعامل Q_1 الذي هو غير معرف لذلك نساوي معامل x بالصفر في المتطابقة (i)

فنجد أن :- $[2(1+\propto)(1+\propto -1) - (1+\propto) + 1]Q_1 = 0$

أي

$$(2\propto^2 + \propto +1)Q_1 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

نحل المعادلة الآسية للحصول على الجذرين الآسين فنجد أن :-

$$\propto_1 = 1 \quad , \propto_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \propto_1 - \propto_2 = \frac{1}{2}$$

حيث أن الجذرين يختلفان بقيمة غير صحيحة " الحالة الأولى " إذن فكـــلا الجذريـــن $\propto_2 = \frac{1}{2}, \propto_1 = 1$ يعطي حلا مستقلا خطيا عن الآخر . وواضح قبل كـــل شـــئ أن قيمتي $\propto$ تحققان المتطابقة(iv) وبالتالي يكون $Q_1 = 0$ ومنه تكون جميع المعاملات الفردية معدومة حسب الصيغة التكرارية (iii) .

الحل الأول $y_1(x)$:-

نعوض عن $\propto = 1$ في الصيغة التكرارية للحصول على المعاملات الزوجيـــة بدلالــة Q_0 .

$$Q_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(2n+5)} Q_n$$

$$n = 0 \qquad Q_2 = \frac{1}{2.5} Q_0$$

$$n = 2 \qquad Q_4 = \frac{1}{4.9} Q_2 = \frac{1}{2.4.5.9} Q_0$$

$$n = 4 \qquad Q_0 = \frac{1}{6.13} Q_4 = \frac{1}{2.4.6.5.9.13} Q_0$$

وهكذا يكون الحل الأول هو :-

$$y_1(x) = x \sum Q_n x^n = Q_0 x \left[1 + \frac{x^2}{2.5} + \frac{x^4}{2.4.5.9} + \frac{x^6}{2.4.6.5.9.13} + \ldots\ldots \right] \qquad (v)$$

الحل الثاني $y_2(x)$

نعوض عن $\propto = \frac{1}{2}$ فتصبح الصيغة التكرارية من الصورة :-

$$Q_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(2n+3)} Q_n$$

$$n = 0 \qquad Q_2 = \frac{1}{2.3} Q_0$$

$$n=1 \qquad Q_4=\frac{1}{4.7}Q_2=\frac{1}{2.4.3.7}Q_0$$

$$n=2 \qquad Q_6=\frac{1}{6.11}Q_4=\frac{1}{2.4.6.3.7.11}Q_0$$

وهكذا يكون الحل الثاني هو :-

$$y_2(x)=Q_0x^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.4.3.7}+\frac{x^6}{2.4.3.7.11}+........\right] \qquad \text{(vi)}$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة من الصورة :-

$$y=Ay_1(x)+By_2(x)=Ax\left[1+\frac{x^2}{2.5}+\frac{x^4}{2.4.3.9}+.......\right]$$
$$+Bx^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.4.3.7}+.......\right] \qquad \text{(vii)}$$

حيث ادمج المعامل Q_0 في الثابتين الاختياريين B, A ويكون هذا الحل متقارب من اجل جميع قيم حيث $|x|>0$ لان $R_C=\infty$.

مثال -22- الحالة الثانية :-

حل على هيأة متسلسلة كل من المعادلات التفاضلية التالية حول $x=0$:

$$x^2y''+x(1-x)y'-y=0 \qquad -1-$$

$$4x^2y''+2x(2+x)y'+(3x-1)y=0 \qquad -2-$$

الحل :-

واضح أن $x = 0$ نقطة متفردة منتظمة لكل من المعادلتين السابقتين وبالتالي نفرض حلا من الصورة :- $y(x) = x^{\propto} \sum Q_n x^n$

$$y' = \sum (n+\propto) Q_n x^{n+\propto-1} \quad , \quad y'' = \sum (n+\propto)(n+\propto-1) Q_n x^{n+\propto-2}$$

1- بالتعويض عن y'', y', y في المعادلة المعطاة وتجميع حدود قوي x المتشابهة والقسمة على $x^{\propto}$ نجد أن :-

$$\sum \left[(n+\propto)(n+\propto-1)+(n+\propto)-1\right] Q_n x^n - \sum (n+\propto) Q_n x^{n+1} = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^0) بالصفر على المعادلة الآسية :

$$\left[\propto(\propto-1)+\propto-1\right] Q_0 = 0 \quad , \quad Q_0 \neq 0 \Rightarrow \propto^2 - 1 = 0$$

أي : $\propto_1 = 1 \quad , \propto_2 \; -1$

وهو عدد صحيح موجب $\propto_1 - \propto_2 = 2 =$ Positive integer

لذلك نحسب أولاً $y(x,\propto)$ حيث نرجئ إلى حين التعويض بجذور $\propto$. بمساواة معامل x^n بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية :

$$Q_n = \frac{1}{n+\propto+1} Q_{n-1}$$

إذن :

$$Q_1 = \frac{1}{\propto+2} Q_0 \quad , \quad Q_2 = \frac{1}{(\propto+3)(\propto+1)} Q_0 , Q_3 = \frac{1}{(\propto+4)(\propto+3)(\propto+2)} Q_0 , \ldots\ldots.$$

ومنه تكون الدالة :-

$$y(x,\propto)=x^{\propto}\sum_{n} a_n x^n = a_0 x^{\propto}\left[1+\frac{x}{\propto+2}+\frac{x_2}{(\propto+2)(\propto+3)}+.......\right]$$

$$y_1(x)=y(x,\propto)\ |_{\propto=1} = x\left[1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3.4}+\frac{x^5}{3.4.5}+.....\right]$$

$$=2x\left[\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{5!}+......\right]$$

$$=\frac{2}{x}\left[e^x-x-1\right]$$

و

$$y_2(x)=y(x,\propto)\ |_{\propto-1} = \frac{1}{x}\left[1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+....\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.........\right]=\frac{1}{x}e^x$$

وواضح انه لا توجد مشكلة في حساب $y_2(x)$ على نمط $y_1(x)$ ويكون الحل العام من الصورة $y(x)=\frac{2A_1}{x}(e^x-x-1)+\frac{A_2}{x}e^x$

والذي يمكن وضعه على الصورة :-

$$y(x)=\frac{1}{x}\left[A_3 e^x + A_4(x+1)\right]$$

2-نقوم بنفس الخطوات بالنسبة للمعادلة الثانية فنحصل على :-

$$\sum\{4(n+\propto)(n+\propto-1)+4(n+\propto)-1\}a_n n^x+\sum\{2(n+\propto)+3\}a_n x^{n+1}=0$$

بمساواة معامل أدني قوة (x^0) بالصفر نحصل على المعادلة الآسية :-

$$[4\propto(\propto-1)+4\propto-1]a_0=0, a_0\neq 0$$

$$4\propto^2-1=0\Rightarrow\propto_1=\frac{1}{2},\propto_2=-\frac{1}{2}$$

ويكون لدينا عدد صحيح موجب $\delta=\propto_1-\propto_2=1$

إذن نحن بصدد الحالة الثانية أيضا .

بمساواة معامل x^0 بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية :-

$$a_n=-\frac{2(n+\propto)+1}{4(n+\propto)^2-1}a_{n-1}=-\frac{1}{2(n+\propto)}a_{n-1}$$

إذن :

$$a_1=-\frac{1}{2(\propto+1)-1}a_0=-\frac{1}{2\propto+1}a_0$$

$$a_2=-\frac{1}{2(\propto+2)-1}a_1=\frac{1}{(2\propto+3)(2\propto+1)}a_0$$

$$a_3=-\frac{1}{2(\propto+3)-1}a_2=-\frac{1}{(2\propto+5)(2\propto+3)(2\propto+1)}a_0$$

وهكذا . وعليه يكون :

$$y(x,\propto)=a_0x^{\propto}\left[1-\frac{x}{2\propto+1}+\frac{x^2}{(2\propto+3)(2\propto+1)}-\dots\right]$$

والحل الأول $y_1(x)$ يقابل $\propto=\frac{1}{2}$ نأخذ $a_0=1$

$$y_1(x)=y(x,\propto)\ |_{\propto=\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.4}-\frac{x^3}{2.4.6}+.........\right]$$

هنا لا يمكن الحصول على $y_2(x)$. بنفس الطريقة . لأنه هناك صعوبة في معامل x حيث يصبح لانهائيا لو وضعنا $\propto=-\frac{1}{2}$ وللتغلب على هـــذه الصعوبـــة نلجـــأ إلـــى الطريقة التالية :-

نضرب $y(x,\propto)$ في $(\propto-\propto_2)$ ثم نوجد قيمة المشتقة الجزئية لحاصل الضـــرب بالنسبة إلى $\propto$ فيكون ذلك هو الحل الثاني $y_2(x)$ عندما $\propto=\propto_2$

أي أن :

$$y_2(x)=\frac{\partial}{\partial\propto}\left[(\propto-\propto_2)y(x,\propto)\right]_{\propto=\propto_2}$$

كما يمكن فرض الحل الثاني من الصورة التالية :-

$$y_2(x)=y_1(x)g\ln x+x^{\propto_2}\sum\bar{a}_n x^n \qquad \text{(I)}$$

حيث المعاملات $\bar{a}_n$ والثابت g تعتمد على طبيعـــة المعادلـــة التفاضليـــة المعطـــاة . ولتعيينهم نعوض بهذه الصورة في المعادلة التفاضلية .

لنحسب أولاً لدالة :-

$$(\propto-\propto_2)y(x,\propto)=\frac{1}{2}(2\propto+1)y(x,\propto)$$

$$=\frac{1}{2}a_0\left[(2\propto+1)x^{\propto}-x^{\propto+1}+\frac{x^{\propto+2}}{2\propto+3}-\frac{x^{\propto+3}}{(2\propto+5)(2\propto+3)}+......\right]$$

وواضح أننا تخلصنا من العامل المربك $(2\propto+1)$ من المقام . وبالتالي :-

$$\frac{\partial}{\partial \propto}\left[\left(\propto+\frac{1}{2}\right)y(x,\propto)\right]=\frac{1}{2}a_0\left[2x^{\propto}+(2\propto+1)x\ln x-x^{\propto+1}\ln x\right.$$

$$-\frac{2}{(2\propto+3)^2}x^{\propto+2}+\frac{1}{2\propto+3}x^{\propto+2}\ln x$$

$$\left.+\frac{8(\propto+2)}{(2\propto+5)^2(2\propto+3)^2}x^{\propto+3}-\frac{1}{(2\propto+5)(2\propto+3)}x^{\propto+3}\ln x....\right]$$

بوضع $\propto=-\frac{1}{2}$ نحصل على $y_2(x)$ على الصورة :

$$y_2(x)=\frac{\partial}{\partial \propto}\left[\left(\propto+\frac{1}{2}\right)y(x+\propto)\right]_{\propto=-\frac{1}{2}}=a_0x^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{32}x^3-.........\right]$$

$$-\frac{1}{2}a_0x^{\frac{1}{2}}\ln x\left[1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2.4}x^2.......\right]$$

بأخذ $a_0=1$ نجد أن

$$y_2(x)=-\frac{1}{2}(\ln x)y_1(x)+\frac{1}{\sqrt{x}}\left[1-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{3.2}x^3....\right]$$

ويكون الحل العام للعادلة المعطاة هو :-

$$y(x)=A_1y_1(x)+A_2y_2(x)=\left[A_1-\frac{1}{2}A_2\ln x\right]\sqrt{x}\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2.4}x^2-......\right]$$

$$+\frac{A_2}{\sqrt{x}}\left[1-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{32}x^3-......\right]$$

مثال -23- الحالــة الثالثــة :-

حل على هيأة متسلسلة كل من المعادلات التالية :-

1- $x^2y''-xy'+y=0$

2- $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$

3- $xy''+y'+xy=0$

الحــل :-

$$P(x)=-\frac{1}{x}\Rightarrow xP(x)=-1\Rightarrow \rho_0=1,\rho_n=0:n\geq 1$$

$$Q(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2Q(x)=1\Rightarrow q_0=1,q_n=0:n\geq 1$$

واضح أن $x=0$ هي نقطة منفردة منتظمة ولا توجد نقطة منفردة محــــددة أخــرى وبالتالي يمكن الحصول على حـــل متسلســلة يصلــح لجميــع قيــم $|x|>0$ علــى الصـــــورة:-

$$y(x)=x^{\propto}\sum a_nx^n=\sum a_nx^{n+\propto},a_0\neq 0 \qquad (i)$$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة قيد الحل نحصل على :-

$$x^2\sum(n+\propto)(n+\propto-1)a_0x^{n+\propto-2}-x\sum(n+\propto)a_nx^{n+\propto-1}+\sum a_nx^{n+\propto}=0$$

أو

$$\sum[(n+\propto)(n+\propto-1)-(n+\propto)+1]a_nx^{n+\propto}=0 \qquad (ii)$$

بمساواة معامل ادني قوة بالصفر نحصل على المعادلة الآسية :-

$$[\propto(\propto-1)-\propto+1]a_0=0 \quad , \quad a_0\neq 0$$

أي أن الجذرين الآسين متساويان . وبالتالي نؤجل إلى حين مساواة معامل أدني قـــوة بالصفر . ونبدأ بإيجاد الصيغة التكرارية بمساواة معامل x^n بالصفر :

$$\left[(n+\propto)(n+\propto-1)-(n+\propto)+1\right]a_n=0 \qquad \text{(iv)}$$

أو

$$(n+\propto-1)^2 a_n=0 \qquad , n\geq 0$$

وواضح أن جميع المعاملات a_n محدودة من اجل $n\geq 1$. نأخذ $a_0=1$ وعلـــى ذلـــك يكون الحل هو :-

$$y(x,\propto)=a_0x^{\propto}=x^{\propto}$$

نحصل على الحل الأول بوضع $\propto=1$

$$y_1(x)=y(x,\propto)\ \Big|_{\propto=1}=x$$

للحصول على الحل الثاني نفاضل (v) بالنسبة إلى $\propto$ ثم نضع $\propto=1$

$$y_2(x)=\frac{\partial y(x,\propto)}{\partial\propto}\ \Big|_{\propto=1}=x^{\propto}\ln|x|\Big|_{\propto=1}=x\ln|x|$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة من الصورة :-

$$y(x)=A_1y_1(x)+A_2y_2(x)=A_1x+A_2x\ln|x|$$

<u>ملاحظات :-</u>

أ- يمكن أيضا فرض الحل الثاني من الصورة :-

$$y_2(x)=x\ln x+\sum\overline{a_n}x^{n+\propto_1}$$

ثم بالتعويض عنه في المعادلة التفاضلية يمكن تعيين المعاملات $\overline{a_n}$

ب- يمكن أيضا الحصول على الحل الثاني باستعمال طريقة تخفيض المرتبة :

2- $$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$$

$$P(x)=\frac{3x-1}{x(x-1)} \quad ,Q(x)=\frac{1}{x(x-1)}$$

حيث $xP(x)$ $x^2Q(x)$ دالتان تحليليتان إذن فالنقطة $x_0=0$ هي نقطة منفردة منتظمة . ويمكن الحصول على الحل على هيأة متسلسلة حول $x_0=0$ ويكون على الصورة :-

$$y(x)=\sum a_n x^{n+\propto} \quad , 0<|x|<1$$

بالتعويض عن $y(x)$ ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$(x^2-x)\sum(n+\propto)(n+\propto-1)a_n x^{n+\propto-2}+(3x-1)\sum(n+\propto)a_n x^{n+\propto-2}$$
$$+\sum a_n x^{n+\propto}=0$$

بعد جمع الحدود المتشابهة والقسمة على $x^{\propto}$ نجد :

$$\sum[(n+\propto)(n+\propto-1)+3(n+\propto)+1]a_n x^n-\sum[(n+\propto)(n+\propto-1)+(n+\propto)]a_n x^{n-1}=0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^{-1}) بالصفر (بوضع $n=0$ في المجموع الثاني) نحصل على :

$$[\propto(\propto-1)+\propto]a_0=0 \quad , \quad a_0\neq 0$$

إذن $$\propto^2=0 \Rightarrow \propto_1=\propto_2=0$$

أي أن الجذرين الآسين متساويان . وبالتالي نرجئ إلى حين مساواة معامل أدنى قـــوة بالصفر وبدلاً من ذلك نوجد الصيغة التكرارية . نساوي معامل x^n بالصفر وذلك بعـد تغير الدليل في المجموع الثاني :

$$\left[(n+\propto)(n+\propto-1)+3(n+\propto)+1\right]a_n-\left[(n+\propto-1)(n+\propto)+(n+\propto+1)\right]a_{n+1}=0$$

إذن
$$a_{n+1}=\frac{(n+\propto)(n+\propto+2)+1}{(n+\propto+1)^2}a_n=a_n$$

أي أن جميع المعاملات متساوية وتساوي a_0 . بأخذ $a_0=1$ يكون :

$$y(x,\propto)=x^{\propto}\sum a_n x^n=x^{\propto}\left[1+x+x^2+\ldots\right]$$

أو
$$y(x,\propto)=x^{\propto}\frac{1}{1-x}\quad,\quad 0<|x|<1$$

للحصول على الحل الأول $y_1(x)$ نضع $\propto=0$ في عبارة $y(x,\propto)$

$$y_1(x)=y(x,\propto)\Big|_{\propto=0}=\frac{1}{1-x}$$

للحصول على الحل الثاني $y_2(x)$ نفاضل $y(x,\propto)$ جزئياً بالنسبة إلى $\propto$ ثم نضـــع $\propto=0$:

$$y_2(x)=\frac{\partial y(x,\propto)}{\partial\propto}\bigg|_{\propto=0}=\frac{x^{\propto}}{1-x}\ln x\bigg|_{\propto=0}\frac{\ln x}{1-x}$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x)=A_1y_1(x)+A_2y_2(x)=\frac{1}{1-x}\left[A_1+A_2\ln x\right]\ ,\quad 0<|x|<1$$

و A_2, A_1 ثابتان اختياريان .

3- لدينا $xy'' + y' + xy = 0$

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad Q(x) = 1$$

واضح أن $x_0 = 0$ نقطة متفردة منتظمة ولا توجد نقط متفردة أخرى محدودة وعلى ذلك يمكن الحصول على متسلسلة الحل حول $x_0 = 0$ التي تتقارب من اجل $|x| > 0$:

$$y(x) = x^{\propto} \sum a_n x^n = \sum a_n x^{n+\propto}$$

بالتعويض من $y(x)$ ومشتقيها في المعادلة قيد الحل وتجميع الحدود المتشابهة والقسمة على $x^{\propto}$ نحصل على :

$$\sum \left[(n+\propto)(n+\propto-1)+(n+\propto)\right] a_n x^{n-1} + \sum a_n x^{n+1} = 0$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^{-1}) بالصفر وذلك بوضع $n = 0$ في المجموع الأول نحصل على المعادلة الآسية :

$$\left[\propto(\propto-1)+\propto\right] a_0 = 0 \quad , \quad a_0 \neq 0$$

أو $\propto^2 = 0 \Rightarrow \propto_1 = \propto_2 = 0$

أي أن هناك جذراً مزدوجاً . نرجئ إلى حين مساواة معامل أدنى قوة بالصفر . وبدلاً من ذلك نوجد الصيغة التكرارية . بمساواة معامل x^n بالصفر وذلك بعد تغيير الدليل في المجموع الأول والمجموع الثاني فنحصل على :

$$\left[(n+\propto+1)(n+\propto)+(n+\propto+1)\right] a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

أو

$$a_{n+1}=-\frac{1}{(n+\propto+1)^2}a_{n-1}\Leftrightarrow a_n=-\frac{1}{(n+\propto)^2}a_{n-2}\quad , \quad n\geq 2$$

ومن هذه الصيغة التكرارية نحصل على $a_2, a_4, a_6, ...$ بدلالة a_0 بينما $a_3, a_5, a_7, ...$ بدلالة a_1 . لتعيين a_1 نساوي معامل (x^0) بالصفر فنجد :

$$[\propto(\propto+1)+\propto+1]a_1=0$$

والمقدار الذي هو بين قوسين لا ينعدم من اجل $\propto=0$ وبالتالي يكون $a_1=0$ ومنه تكون جميع المعاملات ذات الدليل الفردي معدومة .

إذن :

$$a_{2n}=-\frac{1}{(2n+\propto)^2}a_{2n-2}=(-1)^n\frac{1}{(2n+\propto)^2(2n+\propto-2)^2...(2+\propto)^2}a_0$$

ومنه يكون :

$$y(x,\propto)=x^{\propto}\sum a_nx^n=a_0x^{\propto}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+\propto)^2(2n+\propto-2)^2...(2+\propto)^2}x^{2n}$$

$$=a_0x^{\propto}\left[1-\frac{x^2}{(2+\propto)^2}+\frac{x^4}{(2+\propto)^2(4+\propto)^2}-\frac{x^6}{(2+\propto)^2(4+\propto)^2(6+\propto)^2}+...\right]$$

بأخذ $a_0=1$ يكون الحل الأول :

$$y_1(x)=y(x,\propto)\big|_{\propto=0}=\left[1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+...\right]$$

وللحصول على الحل الثاني تفاضل عبارة $y(x,\propto)$ جزئيا بالنسبة إلى $\propto$ ثم نضع $\propto=0$:

$$\frac{\partial y(x,\propto)}{\partial \propto} = a_0\left[x^{\propto}\ln x - \left\{\frac{x^{\propto+2}\ln x}{(2+\propto)^2} - \frac{2x^{\propto+2}}{(2+\propto)^3}\right\} + \ldots\right]$$

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y(x,\propto)}{\partial \propto}\right|_{\propto=0} = \ln x\left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right]$$

$$+\left[\frac{x^2}{2^2} - (1+\frac{1}{2})\frac{x^4}{2^2.4^2} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} - \ldots\right]$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x)$$

حيث A_2, A_1 ثابتان اختياريان .

IX – 4. متسلسلة الحل حول نقطة منفردة عند اللانهاية :

Series Solution About an Infinite Regular Singular Point:

يمكن الحصول على متسلسلة الحل بجوار نقطة منفردة منتظمة عند اللانهاية للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

باستخدام التعويض $z = \frac{1}{x}$ تصبح النقطة المنفردة عند اللانهاية هي نقطة الأصل .

ومنه يكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = -z^2\frac{dy}{dz}$$

و

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$$

وتصبح المعادلة التفاضلية من الصورة :

$$z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + \left[2z^3 - z^2 P(\frac{1}{z})\right]\frac{dy}{dz} + Q(\frac{1}{z})y = 0 \qquad (14)$$

والتي يمكن حلها بطريقة متسلسلة فروبيثيوس حول النقطة $z = 0$ ثم نعــوض فــي عبارة الحل عن $z = \frac{1}{x}$ لنحصل على $y(x)$ من اجل قيم x الكبيرة .

مثال –24–

حل المعادلة التفاضلية التالية بالقرب من $x = \infty$

$$2x^3 y'' + x^2 y' + y = 0 \qquad (\text{i})$$

الحــل :

باستخدام التعويض $z = \frac{1}{x}$

تصبح المعادلة التفاضلية من الصورة :

$$2z\frac{d^2y}{dz^2} + 3.\frac{dy}{dz} + y = 0 \qquad (\text{ii})$$

وواضح أن $z = 0$ نقطة منفردة منتظمة .

وبالتالي نفرض متسلسلة الحل من الصورة :

$$y = \sum a_n z^{n+\alpha} \quad , \quad a_0 \neq 0 \qquad (\text{iii})$$

التي تتقارب من اجل $|z| > 0$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية(ii) نجــد :

$$\sum(n+\propto)(2n+2\propto+1)a_n z^{n+\propto-1}+\sum a_n z^n=0$$

بمساواة معامل أدنى قوة $(z^{\propto-1})$ بالصفر نحصل على المعادلة الآسية :

$$\propto(2\propto+1)a_0=0 \quad , \quad a_o\neq 0$$

إذن : $\propto_1=0 \quad , \quad \propto_2=-\frac{1}{2}$

ومنه $\propto_1-\propto_2=\frac{1}{2}=non\text{int}eger$

إذن نحن بصدد الحالة الأولى :

أما الصيغة التكرارية فنحصل عليها بمساواة معامل $(x^{n+\propto})$ بالصفر أي :

$$a_{n+1}=-\frac{1}{(n+\propto+1)(2n+2\propto+z)}a_n \quad , \quad n\geq 0$$

من اجل $\propto=0$ نحصل على :

$$a_{n+1}=-\frac{a_n}{(n+1)(2n+3)}$$

$$a_{n+1}=(-1)^n\frac{a_o}{(n+1)!(2n+3)(2n+1)...(3)}$$

ويكون الحل الأول : $(a_o=1)$

$$y_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!(3)(5)...(2n+1)}$$

ومن اجل $\alpha = -\frac{1}{2}$ نحصل على :

$$a_{n+1} = -\frac{an}{(n+1)(2n+1)} = (-1)^n \frac{a_o}{(n+1)!(3)(5)...(2n+1)}$$

ويكون الحل الثاني :

$$y_2(z) = z^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!(3)(5)...(2n+1)}\right]$$

وبالتالي يكون الحل العام بعد وضع $z = \frac{1}{x}$ من الصورة :

$$y(x) = A_1\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3,5,...(2n+1)}(\frac{1}{x^n})\right] +$$

$$+ A_2 x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3,5,...(2n+1)}(\frac{1}{x^n})\right]$$

وهذه المتسلسلة متقاربة من أجل $x > 0$.

تمــــــــارين

I- جد نصف قطر تقارب المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$$

II- جد متسلسلة تيلور حول النقطة x_0 للدوال التالية :

(1) $\sin x \quad , \quad x_0 = 0$ (2) $e^x \quad , \quad x_0 = 0$

(3) $x \quad , \quad x_0 = 1$ (4) $\frac{1}{1+x} \quad , \quad x_0 = 0$

III- جد المشتقة الأولى y' والمشتقة الثانية y'' للمتسلسلة :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

IV- تحقق مما يلي:

$$\sum_{n=0} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1} a_{n-1}(x-1)^n$$

$$\sum_{n=2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\sum a_n x^{n+2} = \sum_{n=2} a_{n-2}x^n$$

$$\sum_{n=k} a_{n+m}x^{n+p} = \sum_{n=0} a_{n+m+k}x^{n+p+k}$$

V- جد المعاملات a_n في المعادلة :

$$\sum_{n=1} na_n x^{n-1} + 2\sum a_n x^n = 0$$

ثم جد المتسلسلة $\sum a_n x^n$

VI- جد متسلسلة الحل في قوى $(x - x_0)$ للمعادلات التفاضلية التالية :

1- $y'' - y = 0 \quad , \quad x_0 = 0$

2- $y'' - xy' - y = 0 \quad , \quad x_0 = 0$

3- $y'' - xy' - y = 0 \quad , \quad x_0 = 1$

4- $y'' + k^2 x^2 y = 0 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad k =$ ثابت

VII- احسب $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$ إذا كانت $y(x)$ هي حل مسألة القيم الحدية التالية :

1- $y'' + xy' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$

2- $y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1$

3- $x^2 y'' + (1+x)y' + 3(\ln x)y = 0 \quad , \quad y(1) = 2 \quad , \quad y'(1) = 0$

VIII- اثبت أن لكل من المعادلات التفاضلية التالية نقطة منفردة منتظمة عند $x_0 = 0$. ثم جد المعادلة الآسية ؛ ثم جذري هذه المعادلة ثم الصيغة التكرارية ، ثم جد متسلسلة الحل المرافق لأكبر جذر للمعادلة الآسية . وإذا كان الجذران مختلفين والفرق بينهما عدد غير صحيح . فجد متسلسلة الحل المرافقة للجذر الثاني للمعادلة الآسية :

1- $2xy'' + y + xy = 0$

2- $xy'' + y = 0$

3- $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$

IX- اثبت أن لكل من المعادلات التفاضلية التالية نقطة منفردة منتظمة عند $x_0 = 0$ ثم جد جذري المعادلة الآسية ثم جد الحلين المستقلين خطياً من اجل $x > 0$:

1- $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$

2- $x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$

3- $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$

4- $x^2y'' + 4xy' + (2+x)y = 0$

X- جد على صورة متسلسلات بجوار النقطة اللانهائية $x = \infty$ حلول المعادلات التفاضلية التالية :

1- $x^2(x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x(2x^2-3)\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

$$x^2(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}-x(x-4)\frac{dy}{dx}-4y=0 \qquad -2$$

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{3dy}{dx}+(1-n^2x^2)y=0 \qquad -3$$

$$x^2(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x[\propto+\beta-1+(1-\theta)x]\frac{dy}{dx}-\propto\beta y=0 \qquad -4$$

XI- بين أن $x=\infty$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=f(x)$$

إذا كانت الدوال $x^2a_1(x)-2x$, $x^4a_2(x)$, $x^4f(x)$

تحليلية عند $x=\infty$.

XII- بين أن $x=\infty$ هي نقطة منفردة منتظمة للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

إذا كانت الدالتان $xa_1(x)$, $x^2a_2(x)$ تحليليتان بجوار $x=\infty$.

الفصل العاشر

متسلسلات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية الخطية الشهيرة

Series Solurtions of some Famous Linear Differential Equations

الفصل العاشر

متسلسلات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية الخطية الشهيرة

Series Solutions of some Famous Linear Differential Equations

Legendre's Equation   x-1- معادلة ليجندر

معادلة ليجندر التفاضلية هي معادلة من الصورة :

$$(1-x^2)y''-2xy'+\propto(\propto+1)y=O \qquad (1)$$

$\propto$ = ثابت

حيث : $$P(x)=-\frac{2x}{1-x^2} \quad , \quad Q(x)=\frac{\propto(\propto+1)}{1-x^2}$$

واضح أن كل $P(x)$, $Q(x)$ غير معرفة عند $x=\pm1$ ولكن $(x\pm1)P(x)$ و $(x\pm1)^2Q(x)$ تحليليتان عند هاتين النقطتين ، ولهذا $x=\pm1$ نقطتان منفردتان منتظمتان . أما النقطة $x=o$ فهي نقطة عادية للمعادلة . والمسافة بين هذه النقطة العادية $x=o$ واقرب نقطة منفردة $x=\pm1$ هي 1 ؛ إذن فنصف قطر تقارب متسلسلة الحل بجوار $x=o$ هو $R_C=1$ أي أن المتسلسلة متقاربة من أجل $|x|<1$.

ويجب اعتبار $\propto>-1$ لأن إذا كانت $\propto\leq-1$ فإنه يمكن كتابتها من الصورة $\propto=-(1+\delta)$ حيث $\delta>o$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$(1-x^2)y''-2xy'+\delta(\delta+1)y=O$$

وهي نفس صورة معادلة ليجندر

مسألة -1-

1- برهن أن متسلسلتي الحلين المستقلين خطياً لمعادلة ليجنـــدر مـــن أجـــل $|x|<1$ همـــا:

$$y_1(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m} \quad (2)$$

$$y_2(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2m)x^{2m+1} \quad (3)$$

2- برهن أنه إذا كانت α معدومة أو عدد صحيـــح زوجـــي موجـــب $2n$ فـــإن المتسلسلة y_1 تختزل إلى كثير حدود من الدرجة $2n$ ؛ يحتـــوي علـــى القـــوى الزوجية لـــ x فقط . ثم عين كثيرات الحدود المرفقة لـــ $\alpha=o,2,4$.

3- برهن أنه إذا كانت α عدد صحيح فردي موجب $\alpha=2n+1$ فـــإن المتسلســـلة y_2 تختزل إلى كثير حدود من الدرجة $2n+1$ يحتوى على القوى الفردية لـــــ x .
ثم عين كثيرات الحدود المرفقة لـــ $\alpha=1,3,5$.

4- كثير حدود ليجندر P_n هو حل لمعادلة ليجندر من أجل $\alpha=n$ والـــذي يحقـــق $P_n(1)=1$.

باستعمال نتائج السؤالين السابقين نجد: $P_o(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$

5- لنعتبر معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) :

$$\frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2}+c\tan\phi\frac{df(\phi)}{d\phi}+n(n+1)F(\phi)=O \quad (4)$$

حيث $O<\phi<\pi$ و n عدد صحيح .

أثبت باستخدام التعويض لـــ $x = \cos\phi$ و $y = F(\cos^{-1}(x))$ أن المعادلـــة (4)
تصبح من صورة معادلة ليجندر (1) من أجل $\propto = x$

6- أستنتج أن كثير حدود ليجندر $P_n(x)$ يمكن أن يوضع على الصورة :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad ، \quad n = o,1,2,... \qquad (5)$$

7- أثبت أن $\int P_n(x)P_m(x)dx = o$ إذا كانت $n \neq m$

8- إذا كان لدينا $f(x) = \sum a_k P_k(x)$ ؛ فأثبت أن :

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)x$$

<u>الحـــل</u> :-

1- نفرض حلاً من الصورة $y = \sum a_n x^n$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) وبعد تجميع الحدود المتشابهة نجد :

$$\sum[-n(n-1) - 2n + \propto(\propto+1)]a_n x^n + \sum n(n-1)a_n x^{n-2} = O$$

ولحساب معامل (x^n) نغير في المجموع الثاني الدليل $n \to n+2$ فنجـــد :

$$\sum[\propto(\propto+1) - n(n+1)]a_n x^n + \sum(n+1)(n+2)a_{n+l}x^n = o$$

بمساواة معامل (x^n) بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية :

$$a_{n+2} = -\frac{\propto(\propto+1) - n(n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n = -\frac{(\propto-n)(\propto+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

وواضح أن المعاملات ذات الدليل الزوجي $a_2, a_4, a_6, \ldots$ تعطى بدلالة المعـــامل a_o . كما تعطي المعاملات ذات الدليل الفردي بدلالة المعامل a_1 .

$$a_2 = -\frac{\propto(\propto+1)}{1.2}a_o$$

$$a_4 = -\frac{(\propto-2)(\propto+3)}{3.4}a_2 = \frac{\propto(\propto-2)(\propto+1)(\propto+3)}{1.2.3.4}a_o$$

$$a_6 = -\frac{(\propto-4)(\propto+5)}{5.6}a_4 = -\frac{\propto(\propto-2)(\propto-4)(\propto+1)(\propto+3)(\propto+5)}{1.2.3.4.5.6}a_o$$

وهكذا من اجل $n = 2m$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{\propto(\propto-2)(\propto-4)\ldots(\propto-2m+2)(\propto+1)(\propto+3)\ldots(\propto+2m-1)}{(2m)!}a_o$$

وكذلك بالنسبة للمعاملات ذات الدليل الفردي :

$$a_3 = -\frac{(\propto-1)(\propto+2)}{2.3}a_1$$

$$a_5 = -\frac{(\propto-3)(\propto+4)}{4.5}a_3 = \frac{(\propto-1)(\propto-3)(\propto+2)(\propto+4)}{2.3.4.5}a_1$$

$$a_7 = -\frac{(\propto-5)(\propto+6)}{6.7}a_5 = -\frac{(\propto-1)(\propto-3)(\propto-5)(\propto+2)(\propto+4)(\propto+6)}{7!}a_1$$

وهكذا من أجل $n = 2m+1$

$$a_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\propto -1)(\propto -3)...(\propto -2m+1)(\propto +2)(\propto +4)...(\propto +2m)}{(2m+1)!} a_1$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y_{(x)} = a_o\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\propto(\propto-2)(\propto-4)...(\propto-2m+2)(\propto+1)(\propto+3)...(\propto+2m-1)x^{2m}\right]$$

$$+a_1\left[x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(\propto-1)(\propto-3)...(\propto-2m+1)(\propto+2)(\propto+4)...(\propto+2m)x^{2m+1}\right]$$

$$= a_o y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

2- إذا كانت $\propto = o$ في هذه الحالة تصبح المعادلة من الصورة :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' = o$$

وتصبح الصيغة التكرارية من الشكل : $a_{n+2} = +\dfrac{n}{n+2}a_n$

ونلاحظ أن المعاملات ذات الدليل الزوجي معدومة عدا a_o . فتصبح المتسلسلة $y_1(x)$ عبارة عن كثير حدود من الدرجة صفر .

$$y_1(x) = 1$$

إذا كانت $\propto =$ عدد زوجي صحيح : $\propto = 2n$

نلاحظ من عبارة $y_1(x)$ أن الحدود تصبح معدومة من أجل $m \ge n+1$ وتكتب في هذه الحالة من الشكل :

$$y_1(n)=1+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\propto(\propto-2)(\propto-4)...(\propto-2m+2)(\propto+1)(\propto+3)...(\propto+2m-1)x^{2m}$$

وهي عبارة عن كثير حدود من الدرجة $2n$ ويحتوى على القوى الزوجية فقط لـــ x

في حالة $\propto=2$ فأن $m\leq 1$ و $y_1(x)=1-\frac{2}{2!}.3.x^2=1-3x^2$

في حالة $\propto=4$ فأن $m\leq 2$ و $y_1(x)=1-\frac{1}{2!}.4.5x^2+\frac{1}{4!}4.2.5.7x^4$

$$=1-1ox^2+\frac{35}{3}x^4$$

3- إذا كانت $\propto=$ عدد فردي صحيح : $\propto=2n+1$

نلاحظ من عبارة $y_2(x)$ أن الحدود تصبح معدومة من أجل $m\geq n+1$
وتكتب في هذه الحالة من الشكل :

$$y_2(x)=x+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(\propto-1)(\propto-3)...(\propto-2m+1)(\propto+2)(\propto+4)...(\propto+2m)x^{2m+1}$$

وهي عبارة عن كثير حدود من الدرجة $2n+1$ يحتوى على القوى الفردية بالنسبة لـــ x .

في حالة $\propto=1$ فأن $y_2(x)=x$

في حالة $\propto=3$ فأن $y_2(x)=x-\frac{5}{3}x^3$

في حالة $\propto=5$ فأن $y_2(x)=x-\frac{14}{3}x^3+\frac{21}{5}x^5$

4- نعرف كثير حدود ليجندر بأنه هو حل على صورة كثير حدود لمعادلة ليجنـــدر بحيث $\propto = n$ والذي يحقق الشرط $P_n(1) = 1$ أي انه لا يحتوي على المتسلسـلة المتباعدة عند $x = 1$ أي :

$$P_n(x) = \begin{cases} a_o y_1(x) & : \propto = \text{صفر أو عدد زوجي صحيح} \\ a_1 y_2(x) & : \propto = \text{عدد فردي صحيح} \end{cases}$$

حيث y_1, y_2 هما عبارة عن كثير حدود كما رأينا في (2و3)

في حالة $\propto = o$: $y_1(x) = 1 \Rightarrow P_o(n) = a_o \Rightarrow P_o(x) = 1$

في حالة $\propto = 1$: $y_2(x) = x \Rightarrow P_1(x) = a_1 x \Rightarrow P_1(x) = x$

في حالة $\propto = 2$:

$$y_1(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow P_2(x) = a_o(1 - 3x^2) \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

في حالة $\propto = 3$:

$$y_2(x) = x - \frac{5}{3}x^2 \Rightarrow P_3(x) = a_1(x - \frac{5}{3}x^2) \Rightarrow P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x)$$

ويمكن إثبات أن العلاقة العامة هي :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=o}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \; x^{n-2k}$$

حيث $[n/2]$ برمز لأكبر عدد صحيح أقل أ و يساوي $n/2$

ومن ملاحظة عبارة $P_n(x)$ من أجل n زوجي أو فردي يمكـــن أن نثبـت أن $P_n(-1) = (-1)^n$. ونترك ذلك للطالب .

5- يلعب كثير حدود ليجندر دوراً هاماً في الفيزياء الرياضية وعلى سبيل المثال عند حل معادلة لا بلاس (معادلة الجهد) في الإحداثيات الكروية نجد المعادلة :

$$\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2}+\cot\varphi\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}+n(n+1)F(\varphi)=o$$

حيث $o<\varphi<\pi$ عدد صحيح موجب .

باستخدام التغيير $x=\cos\varphi$ و $y=f(x)=F(\cos^{-1}x)$ نجد :

$$\frac{dF}{d\varphi}=\frac{dFdk}{dxd\varphi}=-y'.\sin\varphi \quad , \quad \frac{d^2F}{d\varphi^2}=-y''\sin^2\varphi-y'\cos\varphi$$

بالتعويض في المعادلة نحصل على معادلة ليجندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=o \quad , \qquad a=n$$

6 - ليكن كثير حدود ليجندر الملحق المعطى بالعلاقة التالية :

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

من أجل $n=o$ فإن $P_o(x)=\frac{1}{2^o o!}\frac{d^o}{dx^o}(x^2-1)^o=1$

من أجل $n=1$ فإن $P_1(n)=\frac{1}{2\ 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1)=x$

من أجل $n=2$ فإن $P_2(n)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

من أجل $n=3$ فإن $P_3(n)=\frac{1}{2^3 2!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

إذن نلاحظ أن كثير حدود ليجندر يمكن أن يوضع على الصورة :

$$P_n(n) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (n^2 - 1)^n$$

ونسمي هذه العبارة بعبارة رودركز (Rodrigues) من أجل n عدد صحيح موجب .

7- لدينا معادلة ليجندر : $(1 - x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1) y = o$

ونلاحظ أن الحدين الأولين يمكن كتابتها على الصورة .

$$\left[(1 - x^2) y'\right]' + \alpha(\alpha + 1) y = o$$

وفي حالة α عدد صحيح فإن حل هذه المعادلة هو كثير حدود ليجندر $P_n(n)$

$$\left[(1 - x^2) P_n'(x)\right]' = -n(n + 1) P_n(x) \qquad \text{(i)}$$

$$\left[(1 - x^2) P_n'(x)\right]' = m(m + 1) P_m(n) \qquad \text{(ii)}$$

بضرب المعادلة الأولى في $P_m(x)$ والثانية في $P_n(x)$ ثم تكامل بالتجزئة فنحصل على :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = o \quad \text{إذا كان} \quad n \neq m$$

ونسمي هذه الخاصية لكثير حدود ليجندر بخاصية التعامد .

أما إذا كان m = n فإنه يمكن إثبات أن قيمة التكامل هي $2/(2n+1)$

8- ليكن لدينا كثير حدود f في الدرجة n فإنه من الممكن كتابته على صورة توافقية خطية من كثيرات حدود ليجندر : $P_o , P_1 , P_2 ,......, P_n$ أي :

$$f(x) = \sum_{k=o}^{n} Q_k P_k(n)$$

باستخدام نتيجة -7- يمكن تعيين المعاملات Q_k حيث :

نضرب المعادلة السابقة في $P_n(x)$ فنجد :

$$f(x)P_n(x) = \sum_{k=o}^{n} Q_k P_k(x) P_n(x)$$

ثم نكامل الطرفين

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)d_x = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \int_{-1}^{1} P_k P_n dx$$

وحيث

$$\int_{-1}^{1} P_k P_n \mathrm{dx} = \frac{2}{(2k+1)} \delta_{nk}$$

إذن

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \sum_{k=o}^{n} Q_k \frac{2}{(2k+1)} \delta_{nk} = \frac{2Qn}{2n+1}$$

أي

$$Q_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx.$$

حيث

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k \quad \text{إذا كان} \\ 0 & n \neq k \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

ويدعى بدليل كرونيكر [Kronecker index]

معادلة بيسل هي معادلة تفاضلية من الصورة :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = o \qquad \text{(i)}$$

حيث ν ثابت ، وتسمى أيضاً بمعادلة بيسل من الدرجـــة ν وواضـــح أن كـــل مـــن الدالتين $P(x) = 1/x$ ، $Q(x) = \dfrac{x^2 - \nu^2}{x^2}$ غير معروفة عند النقطـــة $x = o$ ولكـــن $xP(x)$, $x^2 Q(x)$ تحليليتان ، إذن فالنقطة $x = o$ نقطة منفردة منتظمة . ولتبســـيط المسألة التالية نعتبر الحالة $x > o$.

مسألة -2-

نجد حل المعادلة بيسل على صورة متسلسلة بجوار النقطة x=o في الحالات التالية:

1- $\nu = o$ 		2- نصف عدد صحيح = ν 		3- عدد صحيح = ν

الحـــل :-

1- هذه الحالة تمثل حالة تساوي الجذرين . بوضـــع $\nu = o$ تصبـــح المعادلـــة مـــن الصورة:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = o \qquad \text{(ii)}$$

نفرض الحل على الشكل التالي :- $Q_o \neq 0$ و $y = x^{\infty} \sum Q_n x^n$

بالتعويض عن y ومشتقتها في المعادلة(ii) نجد :

$$\sum \left[(n+\propto)(n+\propto -1) + n+\propto\right] Q_n x^{n+\propto} + \sum Q_n x^{n+\propto+2} = o$$

$$\sum (n+\propto)^2 Q_n x^{n+\propto} + \sum Q_n x^{n+\propto} = o$$

بمساواة معامل أدنى قوة $(x^{\propto})$ بالصفر نحصل على المعادلة الآسية :

$$Q_o . \propto^2 = o \Rightarrow \propto_1 = \propto_2 = o$$

أي أن الجذرين الآسيين متساويان وبالتالي نؤجل إلى حين مساواة معامل أدنى قوة بالصفر ونبدأ بإيجاد الصيغة التكرارية بمساواة معامل $(x^{n+\propto})$ بالصفر بعد تغير الدليل في المجموع الثاني ، فنحصل على :

$$Q_n(\propto) = -\frac{1}{(n+\propto)^2} Q_{n-2} \qquad : \quad n \geq 2$$

وهذه الصيغة التكرارية تعطي $Q_2, Q_4, Q_6, ...$ بدلالة Q_0 بينما تعطي $Q_3, Q_5, Q_7, ...$ بدلالة a_1 لمعرفة Q_1 نساوي معامل $(x^{\propto+1})$ بالصفر فنجد أن :

$$(\propto +1)^2 Q_1 = o$$

والمقدار الذي هو بين قوسين لا ينعدم لقيم $\propto = 0$ وبالتالي يكون $Q_1 = 0$ ويتبع ذلك انعدام كل المعاملات ذات الدليل الفردي وتبقى المعاملات ذات الدليل الزوجي :

$$Q_{2n} = -\frac{1}{(2n+\propto)^2} Q_{2n-2} = (-1)^n \frac{1}{(2n+\propto)^2 (2n+\propto-2)^2 ......(2+\propto)^2} Q_0$$

وعلى ذلك يكون

$$y(x_1 \propto) = x^{\propto} \sum Q_n x^n = Q_n x^{\propto} \sum_{n:2.4}^{2} \frac{(-1)^n}{(n+\propto)^2 (n+\propto-2)^2 + ...+(2\propto)^2} x^n$$

بأخذه $\propto = o$ يكون الحل الأول :

$$y_1(x) = y(x,\propto)_{\propto=o} = Q_0\left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.2^4} - \frac{x^6}{2^6(3.2)^2} + ...\right]$$

$$= Q_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right] C\ x > o$$

وتسمى الدالة التي هي بين قوسين بدالة بيسل ذات المرتبة صفر ويرمز لها بـالرمز $J_o(x)$ ذات الصنف الأول . وواضح أن هذه المتسلسلة متقاربة من أجل $x > o$ وأن $J_o(x)$ دالة تحليلية عند $x = o$. وللحصول على الحل الثاني نفاضل عبارة $y(x,\propto)$ جزئيا بالنسبة إلى $\propto$ ثم نضع $\propto = o$ و $Q_0 = 1$

$$\frac{\partial y(x,\propto)}{\partial \propto} = Q_o\left[x^{\propto}\ln x - \left\{\frac{x^{\propto+2}\ln x}{(2+\propto)^2} - \frac{2x^{\propto+2}}{(2+\propto)^3}\right\} + ...\right]$$

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x,\propto)}{\partial \propto}_{\propto=o} = \ln x\left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4.2^2} + \frac{x^6}{2^6(3.2)^2} + ...\right]$$

$$+\left[\frac{x^2}{2^2} - (1+\frac{1}{2})\frac{x^4}{2^4.2^2} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{x^6}{2^6(3.2)^2} + ...\right]$$

$$y_2(x) = J_o(x).\ln x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}, x > o \qquad \textbf{(iv)}$$

حيث $H_m = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}$

وعوض الدالة y_2 ، نأخذ عموما الحل الثاني عبارة عن توافقية خطية لـــــ J_o ، y_2 .
ويسمى بدالة بيسل ذات المرتبة صفر وذات الصنف الثاني ويرمز لـــها بـــالرمز Y_o ،
وفق كوبسن Copson نعرفها كما يلي :

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_o(x)\right] \qquad \textbf{(v)}$$

حيث γ ثابت ويدعى بثابت أولر.ماشروني Euler-Mascheroni والمعرفة فيمايلي:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(H_n - \ln(n)\right) \cong o.577$$

وبالتعويض عن y_2 في عبارة Y_o تحصل على :-

$$Y_o(x) = \frac{2}{\pi}\left[(\gamma + \ln\frac{x}{2})J_o(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)}x^{2m}\right] \qquad \textbf{(vi)}$$

ويكون الحل العام لمعادلة بيسل ذات الدرجة صفر من أجل $x > o$ هو :

$$y(x) = A_1 J_o(x) + A_2 Y_o(x) \qquad \textbf{(vii)}$$

ونلاحظ أن: $J_o(x) \to 1$ عندما $x \to o$
و $Y_o(x)$ لا تحتوي على الحد اللوغارتمي المنفرد عند $x = o$ وتكون من الصورة $\frac{2}{\pi}\ln x$ عندما $x \to o^+$.
وإذا أردنا الحصول على حل معادلة بيسل من الدرجة صفر، المنتـــهي عنـــد المبـــدأ والذي نصادفه في معظم الحالات يجب أن نحذف Y_o من الحل العام.

ملاحظـــة :

يمكن كتابة معادلة بيسل في الدرجة ν على الصورة :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = o \qquad \textbf{(viii)}$$

ومن أجل x كبير جدا فأنه واضح أن الحدين $\frac{y'}{x}$ ، $\frac{\nu^2 y}{x^2}$ صغيران جدا ويمكن إهمالهما أمام الحدود الأخرى وتصبح المعادلة في هذه الحالة من الصورة :

$$y'' + y = o$$

وحلي هذه المعادلة هما $\sin x$ ، $\cos x$ ونستنتج أن كل من J_o،Y_o من أجل x كبير، دالة جيبيه، ويمكن إثبات أن :

$$J_o(n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \pi/4) \quad \text{عندما} \quad x \to \infty$$

2- نصف عدد صحيح = ν :

في هذه الحالة يكون الفرق بين الجذرين الآسيين عددا صحيحا موجبا ويظـــهر الحـد $\ln x$ في الحل الثاني . نضع $\nu = 1/2$ فتصبح المعادلة من الصورة .

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = o \qquad \text{(ix)}$$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في هذه المعادلة نحصل على :

$$(\alpha^2 - \frac{1}{4})Q_o x^\alpha + \left[(\alpha+1)^2 - \frac{1}{4}\right]Q_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(\alpha+n)^2 - \frac{1}{4}\right]Q_n + Q_{n-2}\right\}x^{\alpha+n} = o$$

جذرا المعادلة الآسية هما : $(\propto^2 - \frac{1}{4}) = o \Rightarrow \propto_1 = \frac{1}{2}$ ، $\propto_2 = -\frac{1}{2}$

و $\propto_1 - \propto_2 = 1$

والفرق بينهما هو عدد صحيح موجب.

بمساواة معامل $x^{n+\propto}$ بالصفر نحصل على الصيغة التكرارية:

$$Q_n = -\frac{1}{(n+\propto)^2 - \frac{1}{4}} Q_{n-2} \text{ ، } n \geq 2$$

وبمساواة معامل $x^{\propto+1}$ بالصفر نجد أن $\left[(\propto+1)^2 - \frac{1}{4}\right] Q_1 = o$

وبما أن المقدار بين قوسين لا ينعدم من أجل قيمة $\propto = 1/2$ فأن $Q_1 = o$

ويتبع ذلك أن $Q_3 = Q_5 = ... = Q_{2n+1} = ... = o$

والمعاملات ذات الدليل الزوجي تعطى بالعلاقة

$$Q_n = -\frac{Q_{n-2}}{n(n+1)} \qquad n = 2,4,6,......$$

بوضع $n = 2m$ نجد:

$$Q_{2m} = -\frac{Q_{2m-2}}{2m(2m+1)} \qquad m = 1,2,3.,........$$

إذن

$$Q_2 = -\frac{Q_o}{2.3} = -\frac{Q_o}{3!}$$

$$Q_4 = -\frac{Q_2}{4.5} = \frac{Q_o}{5!}$$

$$Q_{2m} = \frac{(-1)^m Q_o}{(2m = 1)!}$$

ويكون الحل الأول : $(Q_o = 1)$

$$y_1(x) = x^x\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] \qquad \textbf{(x)}$$

أو أيضا $\quad x > o \quad$ ،

$$y_1(x) = x^{-x}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

ومتسلسلة القوة في هذه العبارة هي متسلسلة تيلور لدالة $\sin x$. إذن الحل الأول لمعادلة بيسل ذات الدرجة نصف هي $x^{-1/2}\sin x$ وتعرف دالة بيسل ذات الرتبة نصف وذات الصنف الأول بــ : $\quad x > o \quad$ ، $J_{1/2}(x) = (\frac{2}{\pi x})^{1/2}\sin x$

إذا أخذنا $\propto = -1/2$ فإن معامل كل من $Q_o x^{\propto}$ و $Q_1 x^{\propto+1}$ يكون معدوما ولــــهذا نعتــبر Q_o ، Q_1 ثــابتين اختيــاريين . وبالتــالي يمكــن تعييـــن المعـــاملات $Q_2, Q_4, Q_6.....$ بدلالة Q_o والمعاملات $Q_3, Q_5, Q_7......$ بدلاله المعامل به Q_1 .

لدينا

$$Q_n = -\frac{1}{(n+\propto)^2 - 1/4}Q_{n-2}$$

من أجل $\propto = -1/2$ نجد

$$Q_n = -\frac{1}{n(n-1)}Q_{n-2}$$

ومنه $n = 1,2,3,.......$

$$Q_{2n+1} = \frac{(-1)^n Q_o}{(2n)!}$$

و

$$Q_{2n} = \frac{(-1)^n Q_1}{(2n+1)!}$$

إذن

$$y_2(x) = x^{-1/2}\left[Q_o \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + Q_1 \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$= Q_o \frac{\cos x}{x^{1/2}} + Q_1 \frac{\sin x}{x} \qquad \textbf{(xii)}$$

ويكون الحل الثاني المستقل خطياً لمعادلة بيسل ذات الدرجة نصف كما يلي :

$$J_{-1/2}(x) = (\frac{2}{\pi x})^{1/2} \cos x \qquad \textbf{(xiii)}$$

ويكون الحل العام :

$$y(x) = A_1 J_{1/2}(x) + A_2 J_{-1/2}(x) \qquad \textbf{(xiv)}$$

3- عدد صحيح = $\Im$

في هذه الحالة ، يكون الفرق بين الجذرين الآسيين عدداً صحيحاً موجباً ، ولكن الحـــل الثاني يحتوى على الحد اللوغارتمي : بوضع $\nu = 1$ تصبح المعادلة من الصـــورة :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = o \qquad \textbf{(xv)}$$

بالتعويض عن y ومشتقتيها في المعادلة (xv) نجد :

$$(\propto^2 - 1)Q_o x^{\propto} + \left[(\propto + 1)^2 - 1\right]Q_1 x^{\propto+1} + \sum_{n=2} \left\{\left[(\propto + n)^2 - 1\right]Q_n + Q_{n-2}\right\} x^{\propto+n} = o$$

المعادلة الآسية نحصل عليها بمساواة معامل أدنى قوه $(x^{\propto})$ بالصفر حيث $Q_o \neq o$

$$\propto_1 = 1 \quad , \quad \propto_2 = -1$$

حيث عدد صحيح $= \quad \propto_1 - \propto_2 = 2$

الصيغة التكرارية نحصل عليها بمساواة معامل $(x^{\propto+n})$ بالصفر.

$$\left[(n+\propto)^2 - 1\right]Q_n(\propto) = -Q_{n-2}(\propto) \qquad n \geq o$$

أو أيضاً :

$$Q_n(\propto) = -\frac{1}{(n+\propto)^2 - 1} Q_{n-2}(\propto)$$

وبمساواة معامل $(x^{\propto+1})$ بالصفر نجد أن : $\quad \left[(\propto+1)^2 - 1\right]Q_1 = o$

وحيث أن المقدار بين قوسين لا ينعدم من أجل قيم $\propto$: $\propto = 1, -1,$.

إذن $\quad Q_1 = o$

ويتبع هذا كون المعاملات $\left[\ldots\ldots, Q_{2n+1} \ldots\ldots\ldots, Q_5, Q_3\right]$ معدومة ومن أجل القيم

الزوجية لـــ n : $(n = 2m)$ تصبح الصيغة التكرارية كما يلي :

$$Q_{2m} = -\frac{1}{(2m+\propto)^2 - 1} Q_{2m-2} \qquad ، \qquad m = 1,2,\ldots\ldots$$

$$Q_2 = -\frac{1}{(\propto = 1)\ (\propto + 3)} Q_o$$

$$Q_4 = -\frac{1}{(\propto + 3)(\propto + 5)} Q_2 = \frac{1}{(\propto + 1)(\propto + 3)^2 (\propto + 5)} Q_o$$

$$Q_6 = -\frac{1}{(\propto + 1)(\propto + 3)^2 (\propto + 5)^2 (\propto + 7)} Q_o$$

ويكون الحل :

$$y(x,\propto)=Q_0x^{\propto}\left[1-\frac{x^2}{(\propto+1)(\propto+3)}+\frac{x^4}{(\propto+1)(\propto+3)^2(\propto+5)}+\frac{x^6}{(\propto+1)(\propto+3)^2(\propto+5)^2(\propto+7)}+......\right]$$

الحل الأول يقابل $\propto=1$ وبوضع $Q_o=1$ نجد :

$$y_1(x)=y(x,\propto)_{\propto=1}=x\left[1-\frac{x^2}{2.4}+\frac{x^4}{2.4^2.6}-\frac{x^6}{2.4^2.6^2.8}+..............\right]$$

$$=x\left[1-\frac{x^2}{2^2(2)(1)}+\frac{x^4}{2^4(3.2)(2)}-\frac{x^6}{2^6(4.3.2)(3.2)}+..........\right]$$

أي

$$y_1(x)=x\sum_{m=o}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!} \qquad \textbf{(XVI)}$$

وتكون دالة بيسل ذات الرتبة واحد وذات الصنف واحد هي .

$$J_1(x)=\frac{1}{2}y_1(x)=\frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!}$$

والمتسلسلة متقاربة مطلقاً من أجل كل قيم x . والدالة الـ $J_1(x)$ معرفة من أجل جميع قيم x .

هنا لا يمكن الحصول على $y_2(x)$ بنفس الطريقة . لأنه هناك صعوبة في معـــامل x^2 حيث يصبح لا نهائياً لو وضعنا $\propto = -1$. للتغلب على هذه الصعوبـــة نلجـــأ إلـــى الطريقة التي ذكرناها في الفصل السابق في المثال -22- (الحالة الثانية) :

نبحث أولاً عن الدالة :

$$(\propto - \propto_2)y(x_1,\propto) = (\propto +1)y(x_1,\propto)$$

$$= Q_0 x^{\propto}\left[(\propto+1) - \frac{x^2}{\propto+3} + \frac{x^4}{(\propto+3)^2(\propto+5)} - \frac{x^6}{(\propto+3)^2(\propto+5)^2(\propto+7)} + ...\right]$$

وواضح أننا تخلصنا من العامل الحرج $(\propto +1)$ في المقام إذن :

$$\frac{\partial}{\partial \propto}\left[(\propto+1)y(x_1,\propto)\right] = Q_0\left[x^{\propto} + (\propto+1)x^{\propto}\ln x + \frac{x^{\propto+2}}{(\propto+3)^2} - \frac{x^{\propto+2}}{(\propto+3)}\ln x + \right.$$

$$- \frac{3\propto+13}{(\propto+3)^3(\propto+5)^2}x^{\propto+4} + \frac{x^{\propto+4}}{(\propto+3)^2(\propto+5)}\ln x$$

$$\left. + \frac{2(\propto+7)(2\propto+8) + (\propto+3)(\propto+5)}{(\propto+3)^3(\propto+5)^3(\propto+7)^2}x^{\propto+6} - \frac{x^{\propto+6}}{(\propto+3)^2(\propto+5)^2(\propto+7)}\ln x + ...\right]$$

بوضع $\propto = 1$ و $Q_0 = 1$ نحصل على الحل الثاني :

$$y_2(x) = x^{+1}\ln x\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\left(2^2.(2)\right)} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{2^4(2.3)(2)} + ...\right] +$$

$$x^{-1}\left[1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{10}{2^3 4^2}x^4 + \frac{20}{2.4^3 6^2}x^6 - ...\right]$$

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{2^4 2!}\left[(1+\frac{1}{2}) + 1\right]x^4\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^6 3!2!}\left[(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + (1+\frac{1}{2})\right]x^6 + ...\right]$$

أو

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!(m-1)!}x^{2m}\right] \quad \textbf{(xvii)}$$

ويكون الحل الثاني لمعادلة بيسل من الدرجة واحدة عبارة عن دالة بيسل من الرتبـــة واحدة وذات الصنف واحد والتي نرمز لها بالرمز y_1 والتي تعرف كما يلي :

$$y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)\right]$$

ويكون الحل العام للمعادلة (xv) من أجل $x > o$ هو :

$$y(x) = A_1 J_1(x) + A_2 y_1(x) \qquad \textbf{(xviii)}$$

ونشير إلى أن $J_1(x)$ تحليلية عند $x=o$ والحل الثاني y_1 لا يكون غـــير منتـه ويكون من الشكل $\frac{1}{x}$ عندما $x \to o$.

<u>ملاحظـــة</u> :

إذا كان ν عدد حقيقي أكبر من الصفر وكان العدد $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ يختلف عن الصفـــر وغير عدد صحيح . في هذه الحالة بعد التعويض عن y ومشتقاتها نحصل على :

$$\sum\left[(n+\alpha)^2 - \nu^2\right]Q_n x^{n+\alpha} + \sum Q_n x^{n+\alpha+2} = o$$

أي : $(\alpha^2-\nu^2)Q_0x^\alpha+\left[(\alpha+1)^2-\nu^2\right]x^{\alpha+1}+\sum\left\{\left[(n+\alpha)^2-\nu^2\right]Q_n+Q_{n-2}\right\}x^{n+\alpha}=o$

ونحصل على المعادلة الأسية بمساواة معـــامل أدنـــى قـــوة (x^α) بـــالصفر حيـــث $Q_o \neq o$

أي $\alpha^2-\nu^2=o \Rightarrow \alpha_1=\nu_1\ \alpha_2=-\nu$

أما الصيغة التكرارية فتعطى بالعبارة :

$$Q_n=-\frac{Q_n-2}{(n+\alpha)^2-\nu^2} \qquad n\geq 2$$

وبمساواة معامل $x^{\alpha+1}$ بالصفر نجد $\left[(\alpha+1)^2-\nu^2\right]Q_1=o$

والمقدار بين قوسين لا ينعدم من أجل قيم $\alpha=\nu\ ,\ -\nu$ إذن $Q_1=O$

وبالتالي فالمعاملات $Q_3=Q_5=Q_7=\ldots=Q_{2n+1}=\ldots=O$

ولإيجاد الحل الأول نضع $\alpha=\nu$ فنجد :

$$Q_n=-\frac{Q_{n-2}}{n(n+2\nu)} \qquad n\geq 2$$

وللحصول على المعاملات ذات الدليل الزوجي نضع في الصيغة التكرارية

$$Q_{2m}=-\frac{Q_{2m-2}}{2m(2m+2\nu)}=\frac{-Q2n-2}{4m(m+\nu)}$$

وبالتالي :

$$Q_{2m} = (-1)^m \frac{\nu!}{2^{2m} m!(m+\tau)!} Q_o$$

والحل الأول يصبح :

$$y_1(x) = Q_o \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \nu!}{2^{2m} m!(m+\tau)!} x^{2m} \right]$$

ويأخذ $Q_o = \frac{1}{2^\nu \nu!}$ نحصل على الحل الخاص الأول

$$J_\tau(x) = x^\nu \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!} x^{2m}$$

وهي دالة بيسل من النوع الأول والرتبة ν .

أما لإيجاد الحل الثاني نضع $\propto = -\nu$ في الصيغة التكرارية فنحصل على :

$$J_{-\nu}(x) = \overset{-\nu}{x} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\nu)!} x^{2m}$$

وهي دالة بيسل من النوع الأول والرتبة $(-\nu)$ ونلاحظ أن الدالة $J_{-\nu}(x)$ ليس لـها معنى من أجل ν عدد صحيح . لأن إذا كانت $n = \nu$ فإن أحد حـــدود المتسلسـلة يصبح لا نهائيا . كذلك إذا كانت $\nu = o$ فإن الحل الأول والثاني ينطبقان .

x -3- معادلـــة أولـــر EULER'S EQUATION

إحدى الأمثلة البسيطة للمعادلة التفاضلية التي لها نقطة منفردة منتظمة هـــي معادلات أولر أو المعادلة المتساوية الأبعاد وهي من الصورة :

$$x^2 y'' + \beta x y' + \wp y = o \qquad (i)$$

حيث $\wp$, β ثابتان حقيقيان . وواضح أن النقطة $x = o$ نقطة منفردة منتظمـــة لهذه المعادلة لأن كل من التاليتين $P(x) = \frac{\beta}{x}$ و $Q(x) = \frac{\wp}{x^2}$ غير تحليلية عنـد $x = o$ ولكن $xP(x) = \beta$ و $x^2 Q(x) = \wp$ تحليليتان عند $x = o$. وسنبحث الآن الحل العام من اجل قيم $x > o$ ثم نعمم النتائج من اجل $x < o$

مسألة -3-

جد الحل العام لمعادلة أولر (i) حسب قيم $\wp$, β

الحل :

نفرض حلا على صورة متسلسلة : $y = x^{\alpha} \sum Q_n x^n \quad , \quad Q_o \neq o$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة (i) نجد :

$$\sum \left[(n+\alpha)(n+\alpha-1) + \beta(n+\alpha) + \wp \right] Q_n x^{n+\alpha} = O$$

بمساواة معامل أدنى قوة (x^{α}) بالصفر نجد المعادلة الآسية :

$$\alpha(\alpha-1) + \beta\alpha + \wp = O$$

أو

$$\alpha^2 + (\beta-1)\alpha + \wp = O$$

وجذراها هما :

$$\alpha_1 = \frac{-(\beta-1) + \sqrt{(\beta-1)^2 - 4\wp}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{-(\beta-1) - \sqrt{(\beta-1)^2 - 4\wp}}{2}$$

ويمكن أن يكون الجذران حقيقين متمايزين أو متساويين أو مركبين مترافقين حسب قيمة المميز $\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\wp$ إذا كان موجبا أو معدوما أو سالبا . أما الصيغة التكرارية فنحصل عليها بمساواة معامل $(x^{\propto+n})$ بالصفر

$$\left[(n+\propto)(n+\propto-1)+\beta(n+\propto)+\wp\right]Q_n = O \quad , \qquad n \geq 1$$

وواضح أن المقدار بين قوسين لاينعدم من أجل قيم $\propto=\propto_1 , \propto_2$

إذن

$$\text{فرضا} \quad Q_0 \neq o \ , \ Q_n = o \quad n \geq 1 \qquad \textbf{(ii)}$$

الحالة الأولى : الجذران حقيقيان متمايزان : $(\beta - 1)^2 - 4\wp > O$

في هذه الحالة نحصل على الحل الأول بوضع $\propto = \propto_1$ ويكون على الصورة :

$$y_1(x) = x^{\propto_1} \quad , \quad Q_0 = 1 \quad : \quad x > o \qquad \textbf{(iii)}$$

والحل الثاني نحصل عليه بوضع $\propto = \propto_2$

$$y_2 = x^{\propto_2} \quad , \quad Q_0 = 1 \quad : \quad x > o \qquad \textbf{(iv)}$$

ويكون الحل العام للمعادلة **(i)** من الصورة :

$$y(x) = A_1 x^{\propto_1} + A_2 x^{\propto_2} : x > o$$

ونلاحظ أن إذا كانت $\propto_1$ عدد غير أصم فإن $x^{\propto_1}$ يمكن كتابته على الصورة:

$$x^{\propto_1} = e^{\propto_1 \ln x}$$

مثال -1-

حل المعادلة : $2x^2 y'' + 3xy' - y = o$

في هذه الحالة لدينا $\beta = 3$, $\wp = -1$ ويكون الجذران الأسيان هما
$\propto_1 = 1/2$, $\propto_2 = -1$ ونلاحظ أن $\propto_1 - \propto_2 = 3/2$ وهو يختلف عن الصفر
وعن عدد صحيح موجب . إذن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = A_1 x^{1/2} + A_2 x^{-1} \quad , \quad x > o$$

الحالة الثانية : جذر مضعف : $(\beta - 1)^2 - 4\wp = o$

في هذه الحالة الجذران الآسيان متساويان $\propto_1 = \propto_2 = -\dfrac{(\beta - 1)}{2}$ و

$\propto_1 - \propto_2 = o$

ولدينا $Q_o \neq O$, $Q_n = O$, $n \geq 1$

إذن يكون الحل من الصورة :

$$y(x, \propto) = Q_o x^{\propto} \qquad (V)$$

بوضع $\propto = \propto_1$ نحصل على الحل الأول : $y_1(x) = Q_o x^{\propto_1}$

نأخذ $Q_o = 1$ فيكون

$$y_1(x) = x^{\propto_1} \qquad (vi)$$

وللحصول على الحل الثاني نحسب الدالة $\dfrac{\partial}{\partial \propto} y(x, \propto) =$

$$\frac{\partial}{\partial \propto} y(x,\propto) = Q_o x^{\propto}.\ln x = x^{\propto} \ln x \quad , \quad Q_o = 1$$

بوضع $\propto = \propto_1$ نحصل على الحل التالي :

$$y_2(x) = x^{\propto_1} \ln x \qquad \text{(vii)}$$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 x^{\propto_1} + A_2 x^{\propto_1} \ln x$$

$$= (A_1 + A_2 \ln x) x^{\propto_1} \quad : \quad x > o \qquad \text{(viii)}$$

مثال -2-

حل المعادلة : $x^2 y'' + 5xy' + 4y = o$ حيث $x > o$

في هذا المثال لدينا $\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\wp = o$, $\propto_1 = \propto_2 = \frac{-4}{2} = -2$

فيكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = x^{-2}[A_1 + A_2 \ln x] \; : x > o$$

الحالة الثالثة : الجذران مركبان مترافقان $(\beta - 1)^2 - 4\gamma < o$

في هذه الحالة يمكن وضع الجذرين على الصورة :

$$\propto_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad \propto_2 = \lambda - i\mu$$

ولدينا $\propto_1 - \propto_2 = 2i\mu$ فهو عدد مركب .

إذن يكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 x^{\lambda+i\mu} + A_2 x^{\lambda-i\mu}$$

ويمكن كتابة الحد $x^{\propto}$ على الصورة التالية :

$$x^{\lambda+i\mu} = e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} . e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^{\lambda} e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^{\lambda}\left[\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)\right]$$

ويمكن كتابة الحل العام على الصورة :

$$y(x) = x^{\lambda}\left[\beta_1 \cos(\mu \ln x) + \beta_2 \sin(\mu \ln x)\right] \quad x > o \qquad (\mathbf{ix})$$

<u>مثال -3-</u>

جد حل المعادلة : $x^2 y'' + xy' + y = o$

في هذه الحالة لدينا $\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\gamma = -4$

وبالتالي $\propto_1 - \propto_2 = 2i \ , \ \propto_1 = +i \ , \ \propto_2 = -i$

ويكون الحل العام من الصورة (حيث $\lambda = o \ , \ \mu = 1$)

$$y(x) = A_1 \cos(\ln x) + A_2 \sin(\ln x) \ : \ x > o$$

حالة $x < o$:

في هذه الحالة الحد x^{α} غير معرف من اجل $x < o$, α عدد غير صحيح . كذلك الحد $\ln x$ غير معرف من أجل $x < o$. ولكن يمكن أيضا الحصول على حلول معادلة أولر في هذه الحالة وذلك باستخدام التعويض التالي :

بوضع : $x = -\xi \quad , \quad \xi > 0$

و $y = U(\xi)$

تصبح المعادلة (I) من الصورة :

$$\xi^2 \frac{d^2U}{d\xi^2} + \beta\xi \frac{dU}{d\xi} + \gamma U = o \quad , \quad \xi > 0 \qquad (X)$$

وهي نفس صورة معادلة أولر (I) ويكون حلها من الصورة :

$$U(\xi) = \begin{cases} A_1\xi^{\alpha_1} + A_2\xi^{\alpha_2} & : \quad (\beta^2 - 1)^2 - 4\gamma > o \\ (A_1 + A_2 \ln\xi)\xi^{\alpha_1} & : \quad (\beta^2 - 1)^2 - 4\gamma = o \\ [A_1 \cos(\mu \ln\xi) + A_2 \sin(\mu \ln\xi)]\xi^{\lambda} & : \quad (\beta^2 - 1)^2 - 4\gamma < o \end{cases}$$

ثم نعوض ξ بـ $-x$ للحصول على $y(x)$.

ونخلص إلى النظرية التالية :

نظرية -1-

لحل معادلة أولر (I) $\quad x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = o$

في مجال ما يحتوي على نقطة الأصل .

فأن للمعادلة الآسية $\quad \alpha^2 + (\beta - 1)\alpha + \gamma = o$

جذران $\alpha_1 \;,\; \alpha_2$

إذا كان الجذران حقيقيين متمايزين فأن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = A_1|x|^{\alpha_1} + A_2|x|^{\alpha_2}$$

إذا كان الجذران متساويان فأن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = [A_1 + A_2 \ln|x|]|x|^{\alpha_1}$$

إذا كان الجذران مركبين مترافقين فأن الحل العام يكون من الصورة :

$$y = |x|^{\lambda}[A_1 \cos(\mu \ln|x|) + A_2 \sin(\mu \ln|x|] \;,\; \alpha_{1,2} = \lambda \pm i\mu$$

x –4. معادلـــة جـــاوس **Gauss's Equation**

كل معادلة تفاضلية من الشكل :

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = o$$

تسمى معادلة جاوس أو المعادلة فوق الهندسية hyper geometric حيث a, b, c ثوابت معلومة . كما يلاحظ أن لهذه المعادلة ثـــلاث نقـــاط منفـــردة إحداهـــن عنـــد اللانهاية $x = \infty$ والاثنتين الاخرتيـــن همـــا $x = o \;,\; x = 1$ وهمـــا نقطتـــان منفردتان منتظمتان حيث :

$$P_{(x)} = \frac{c}{x(1-x)} - \frac{a+b+1}{x-1}$$

$$Q_{(x)} = -\frac{ab}{x(1-x)}$$

وواضح أن $xP(x)$, $x^2Q(x)$ دالتان تحليليتان كما هو الحال بالنســبة للدالتيــن $(x-1)P_{(x)}$, $(x-1)^2Q_{(x)}$

مسألة –4–

جد الحل العام لمعادلة جاوس حول النقطة المنفردة المنتظمة $x = o$.

الحـــل :

نفرض حلا من الشكل $y = \sum Q_n x^{n+\propto}$ حيث $Q_o \neq o$

وبعد الاشتقاق والتعويض والتجميع نجد :

$$\propto(\propto+c-1)Q_o x^{\propto-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+\propto)(n+\propto+c-1)Q_n-[(n+\propto-1)(n+\propto+a+b-1)+ab]a_{n-1}\}x^{n+\propto-1}=o$$

وبمساواة معاملات $x^{n+\propto}$ بالصفر نجد :

* المعادلة الآسية $\propto(\propto+c-1)Q_o = o$

أو $\propto(\propto+c-1) = o \Rightarrow \propto_1 = o \;,\; \propto_2 = 1-c$

• والصيغة التكرارية :

$$Q_n = \frac{(n+\propto-1)(n+\propto+a+b-1)+ab}{(n+\propto)(n+\propto+c-1)}Q_{n-1}$$

من اجل $n \geq 1$

أو $n \geq 1$ ، $Q_n = \dfrac{(n+\propto-1+\alpha)(n+\propto-1+b)}{(n+\propto)(n+\propto+c-1)}Q_{n-1}$

1- من أجل $\propto = o$ نجد :

$$Q_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} Q_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

أو
$$Q_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} \cdot \frac{(n+a-2)(n+b-2)}{(n-1)(n+c-2)} Q_{n2} = \ldots.$$

وهكذا يمكن الحصول على :

$$Q_n = \frac{(n+a-1)(n+a-2)\ldots(a).(n+b-1)(n+b-2)\ldots(b)}{n!(n+c-1)(n+c-2)\ldots(c)} Q_o \qquad n \geq 1$$

أو أيضا
$$Q_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!c(c+1)\ldots(c+n-1)} Q_o$$

ويمكن اختصارها على الشكل التالي :

$$Q_n = \frac{(a)n(b)n}{n!(c)_n} Q_o$$

حيث
$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

$$= \frac{(a+n)!}{a!}$$

$$(b)_n = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} = \frac{(b+n)!}{b!} \quad , \quad (c)_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} = \frac{(c+n)!}{c!}$$

ونسمي كل من $(a)_n$, $(b)_n$, $(c)_n$ بمعاملي الدالة (مضروب الدالة) وتسمى Γ دالة كاما حيث : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ من أجل $x > o$ ويكون الحل الأول :
$(Q_o = 1)$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\forall} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} x^n \qquad (ii)$$

وتسمى هذه المتسلسلة بالمتسلسلة فوق الهندسية (hypergeometric series)

ويرمز لها بالرمز : $y_1(x) = F(a,b,c,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} x^n$

2- لإيجاد الحل الثاني نضع $\propto = 1 - c$ ومنه :

$$Q_n = \frac{(n+a-c)(n+b-c)}{(n+1-c)(n)} Q_{n-1} \qquad n \geq 1$$

أي $Q_n = \frac{(a+1-c)(a+2-c)...(a+n-c).(b+1-c)(b+2-c)...(b+n-c)}{n!(2-c)(3-c)...(n+1-c)} Q_o$

حيث $n \geq 1$

ويكون الحل الثاني من الشكل : $(Q_o = 1)$

$$y_2(x) = x^{1-c} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n (b+1-c)_n}{n!(2-c)_n} x^n \right] \qquad (ii)$$

ويمكن كتابته على الصورة :

$$y_2(x) = x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, x) \qquad (iv)$$

وواضح أن الحلين y_2, y_1 ساريان المفعول على المجال $o < x < 1$ ويكون الحل العام في الشكل :

$$y = A_1 F(a,b,c,x) + A_2 x^{1-c} F(a-c+1\ ,\ b-c+1\ ,\ 2-c\ ,\ x)$$

ملاحظة :

1- إذا كان c عدد صحيح فأن إحدى الحلين يكون تاما والأخر يحتوي في المقام على صفر . وعلى سبيل المثال إذا كان $c = 5$ فأن الحد $(2-c)_n$ في المعادلة **(iii)** يصبح معدوما من اجل $n \geq 4$ أي :

$$(2-c)_4 = (-3)_4 = (-3)(-2)(-1)(o) = o$$

2- إذا كان c عدد صحيح ولكن b, a غير عددين صحيحين فأن إحدى حلول معادلة جاوس حول النقطة $x = o$ يكون من النوع اللوغارتمي .

3- إذا كان c عدد صحيح وكان a و (أو) b عددا صحيحا ، فأن الحل يمكن أن يحتوي على الحد اللوغارتمي . ونترك إثبات ذلك للطالب .

X -5- معادلة لاكير   Laguerre's Equation:

كل معادلة تفاضلية من الشكل :

$$xy'' + (1-x)y' + ky = o \qquad \text{(i)}$$

تسمى معادلة لاكير حيث k عدد صحيح موجب أو سالب . وواضح أن نقطة المبدأ هي نقطة منفردة منتظمة .

مسألة -5-

جد الحل العام لمعادلة لاكير حول النقطة $x = o$

الحـل :

نفرض حلا على الصورة : $y = \sum Q_n x^{n+\propto} \quad , \quad Q_o \neq o$

بعد الاشتقاق والتعويض والتجميع نجد :

$$\propto^2 Q_o x^{\propto-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+\propto)^2 Q_n + (k-n-\propto+1) Q_{n-1} \right] x^{n+\propto-1} = O$$

بمساواة معاملات $x^{n+\propto}$ بالصفر نجد :

المعادلة الآسية $\propto^2 Q_o = o$

وجذراها هما $\propto_1 = \propto_2 = O$ أي الجذران متساويان . والصيغة التكرارية :

$$Q_n = \frac{n+\propto-1-k}{(n+\propto)^2} Q_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

ويمكن الحصول على Q_n بدلالة Q_o حيث :

$$Q_n = \frac{(n+\propto-1-k)(n+\propto-2-k)\dots(\propto-k)}{(n+\propto)^2 (n-1+\propto)^2 \dots\dots(1+\propto)^2} Q_o \quad , \quad n \geq 1$$

$$= \frac{(\propto-k)_n}{\left[(\propto+1)_n\right]^2} Q_o$$

ويكون الحل كمايلي :

$$y(x,\propto) = Q_o x^{\propto} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\propto-k)_n}{\left[(\propto+1)_n\right]^2} x^n \right] \qquad \text{(ii)}$$

وللحصول على الحل الأول نأخذ $\propto = o$, $Q_o = 1$ نجد :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k)_n x^n}{(n!)^2} \qquad \text{(iii)}$$

ونلاحظ أن إذا كان k عدداً صحيحاً غير سالب فإن $(-k)_n = o$ من اجل $n > k$
ويصبح الحل الأول للمعادلة من الشكل :

$$y_1(x) = \sum_{n=o}^{k} \frac{(-k)_n x^n}{(n!)^2} \qquad \text{(iv)}$$

وهو عبارة عن كثير حدود من الدرجة n ويسمى بكثير حدود لاكـــير ونرمــز لــه بالرمز:

$$L_n(x) = y_1(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-k)_n}{(n!)^2} x^n$$

ويمكن كتابته على الشكل :

$$L_n(x) = \sum_{n=o}^{k} \frac{(-1)^n k!}{(n!)^2 (l-n)!} x^n \qquad \text{(v)}$$

للحصول على الحل الثاني نحسب : $\dfrac{\partial}{\partial \propto} y(x, \propto)$

$$\frac{\partial}{\partial \propto} y(x,\propto) = Q_o x^{\propto} \ln x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\propto - k)_n}{[(\propto + 1)_n]^2} x^n \right] + Q_o x^{\propto} \frac{\partial}{\partial \propto} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\propto - k)_n}{[(\propto + 1)_n]^2} x^n \right\}$$

ويكون الحل الثاني هو $= (Q_o = 1)$

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \propto} y(x, \propto)\Big|_{\propto = o} =$$

$$= L_n(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k)_n (H_{k-n} - H_k - 2H_n) x^k}{(n!)^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k! (n-1)! x^{n+k}}{[(n+k)!]^2} \qquad \textbf{(vi)}$$

ونلاحظ أن الحل الأول معرف من أجل جميع كل قيم x بينما الحل الثاني معرف مـن أجل قيم $x > o$.

تمـــاريـــــــــن

I ـ حل على صورة كثيرات حدود ليجندر المعادلات التالية :-

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+12y=o \quad -1$$

$$(a^2-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=o \quad , \quad a\neq o \quad -2$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+ax+b)\frac{dy}{dx}\right]-n(n+1)y=o \quad , \quad a^2-4b>o \quad -3$$

بالنسبة للمعادلة –3– استخدم التعويض : $x=\sqrt{\frac{1}{2}a^2-b}X-\frac{1}{2}a$

II – اثبت أن :

$$P_{2m+1}(o)=o \quad , \quad P_{2m}(o)=(-1)^m\frac{1.3.5...(2m-1)}{2^m.m!}$$

III – اثبت أن : $y(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

هي حل لمعادلة ليجندر .

IV – بين أن المعادلة :

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dy}{d\theta})+n(n+1)\sin\theta Y=o$$

تتحقق من اجل $y(\theta)=P_n(\cos\theta)$ ومن اجل $Y(\theta)=Q_n(\cos\theta)$

حيث $$P_n(n) = x^n F(\frac{-n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1-2n}{2}, x^{-2})$$

و $$Q_n(x) = x^{-n-1} F(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2})$$

و $F(\propto, \beta, \gamma, x)$ هي الدالة فور الهندسية (Hypergeometric Function)

V – جد على صورة دوال بيسل من الصنف الأول حل المعادلات التفاضلية التالية :

1- $$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = o$$

2- $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (a^2x^2 - n^2)y = o \quad , \quad a \neq o$$

3- $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x-s}\frac{dy}{dx} + \left[a^2 - \frac{n^2}{(x-s)^2}\right]y = o \quad , \quad a \neq o$$

4- $$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1+2n)\frac{dy}{dx} + xy = o$$ (استخدم التعويض: $y = x^{-n}\mathrm{y}$)

5- $$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2xy = o \quad , \quad a \neq o$$ { أستخدم التعويض $x = \left[\frac{3}{2a}\mathrm{X}\right]^{2/3}$ و $\mathrm{y} = x^{1/2}Y$, }

VI – حل معادلات أويلر التالية :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} - 6y = o \qquad -1$$

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + y = o \qquad -2$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = o \qquad -3$$

VII – حل بدلالة الدوال فوق الهندسية ، المعادلات التفاضلية التالية :

$$4x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(1-4x)\frac{dy}{dx} - y = o \qquad -1$$

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (cx+d)\frac{dy}{dx} + ey = o \qquad -2$$

$$x(a+x)\frac{d^2y}{dx^2} + (cx+d)\frac{dy}{dx} + ey = o \quad , \quad a \neq o \qquad -3$$

$$(x^2 + ax + b)\frac{d^2y}{dx^2} + (cx+d)\frac{dy}{dx} + ey = o \quad , \quad a^2 > 4b \qquad -4$$

في هذه الحالة نعتبر $x^2 + ax + b = \frac{x - s_1}{x - s_2}$ واستخدام التعويض $X = \frac{x - s_1}{x - s_2}$

VIII – حل المعادلات التفاضلية التالية بدلالة كثيرات حدود لاكير :

1- $xy'' + (1-x)y + y = o$

2- $xy'' + (1-x)y - 2y = o$

3- $xy'' + (a-x)y - 5y = o \quad , \quad a \neq o$

الفصل الحادي عشر

المعادلات التفاضلية الخطية من المراتب العالية

Higher Order Linear Differential Equations

الفصل الحادي عشر

المعادلات التفاضلية الخطية من المراتب العالية

Higher Order Linear Differential Equations

IX ـ1. مفاهيم ونظريات .Concepts and Theorems

سبق أن درسنا في الفصل السابع المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وفي هذا الفصل ستوسع هذه الدراسة لتشمل المعادلات ذات المراتب العالية.
والمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n هي معادلة من الصورة :

$$(1) \qquad p_n(x)y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+.......+p_n(x)y'+p_o(x)y=R(x)$$

حيث المتغير التابع y وجميع مشتقاته مرفوعة للقوة 1 ولا توجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينهما. والدوال المعاملات $p_i(x)$ هي دوال في المتغير المستقل x وكذلك الحال بالنسبة للدالة $R(x)$.
بما أن المعادلة (1) من المرتبة n يجب إلا ينعدم معامل $y^{(n)}$ تطابقياً $p_n(x)\neq o$ على امتداد المجال $\propto < x < \beta$ ، وسنفرض أن الدوال $p_o, p_1, ..., p_n$ و R مستمرة وذات قيم حقيقية على المجال $\propto < x < \beta$ وبالقسمة على $p_n(x)$ نجد أن :

$$(2) \qquad L[y]=y^{(n)}+\underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)}+........+\underline{p}_1(x)y'+\underline{p}_o(x)y=g(x)$$

حيث $\underline{p}_i(x)=\dfrac{p_i(x)}{p_n(x)}$ ، $g(x)=\dfrac{R(x)}{p_n(x)}$ و L مؤثر تفاضلي الخطي . إذا لم تنعدم $g(x)$ تطابقياً ، قيل عن المعادلة (2) أنها غير متجانسة أما إذا انعدمت $g(x)$ تطابقياً أي $R(x)=o$ على امتداد المجال $\propto < x < \beta$ قيل أنها معادلة متجانسة.

أما الدراسة الرياضية الملحقة بالمعادلة (2) فهي شبيهة بدراسة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية وبالتالي سنعطي النتائج المتعلقة بالمعادلة من المرتبة n . أما الإثباتات فهي مشابهة للإثباتات المقدمة في حالة المعادلات من المرتبة الثانية .

نلاحظ أن المعادلة (2) تحتوي على المشتقة n بالنسبة للمتغير x وبالتالي يظهر بالحل العام n ثابتاً أختيارياً.

ولتعيين هذه الثوابت الاختيارية يجب معرفة الشروط الابتدائية التالية:-

$$y(x_o) = Q_o, y'(x_o) = Q_1, \ldots\ldots y^{(n-1)}(x_o) = Q_{n-1} \qquad (3)$$

حيث x_o نقطة من المجال $\propto < x < \beta$ ، $Q_o, Q_1, \ldots\ldots, Q_{n-1}$ مجموعة من الأعداد الحقيقية.

نظرية -1-

إذا كان $y_1(x)$ حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية المتجانسة:

$$L[y] = y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + \underline{p}_o y = o \qquad (4)$$

فإن الدالة $y_2 = \ell_1 y_1(x)$ هي أيضاً حل للمعادلة (4) حيث ℓ_1 ثابت اختياري :

البرهان:-

بما أن $y_1(x)$ حل خاص بالمعادلة (4) فهو يحقق المعادلة ويحولها إلى متطابقة أي:

$$L[y_1] = y_1^{(n)} + \underline{p}_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + \underline{p}_o(x) y_1 = o$$

وإذا عوضنا $y_2 = \ell_2 y_1$ في الطرف الأول للمعادلة (4) نجد أن :

$$L[y_2] = y_2^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + \underline{p}_o(x) y_2$$

وبما أن : $y_2 = \ell_2 y_1(x)$ فإن $y_2^{(n)} = \ell_1 y_1^{(n)}(x)$

إذن :

$$L[\ell_1 y_1] = \ell_1 y_1^{(n)} + \ell_1 \underline{p}_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + ... + \ell_1 \underline{p}_o(x) y_1(x)$$

$$= \ell_1 L[y_1] = o$$

وهـــــو المطلـــــوب

<u>نظرية -2-</u>

إذا كان $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين خاصين للمعادلة (4) فإن الدالة

$$y_3 = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2$$

حيث ℓ_2, ℓ_1 ثابتين اختياريان , هي أيضاً حل للمعادلة (4).

البرهان :

إذا كان y_1 حلاً للعادلة (4) فهو يحولهما إلى متطابقة من اجل جميع قيم x

أي :

$$L[y_1] = y_1^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + ... + \underline{p}_o(x) y_1 = o$$

وكذلك بالنسبة إلى y_2 أي :

$$L[y_2] = y_2^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + ... + \underline{p}_o(x) y_2 = o$$

وإذا عوضنا y_3 في الطرف الأول للمعادلة (4) نجد أن :

$$L[y_3] = (\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)(\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)^{(n-1)} + ...+ \underline{P}_O(x)(\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)$$

وحيث $(\ell_1 y_1 + \ell_2 y_2)^{(n)} = \ell_1 y_1^{(n)} + \ell_2 y_2^{(n)}$

إذن :

$$L[y_3] = \ell_1 [y_1^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_1^{(n-1)} + \dots\dots\dots + \underline{p}_o(x) y_1(x)].$$

$$+ \ell_2 [y_2^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y_2^{(n-1)} + \dots\dots\dots + \underline{p}_o(x) y_2].$$

$$= \ell_1 L[y_1] + \ell_2 L[y_2] = o$$

وبالتالي $y_3 = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2$ فهو حل المعادلة. وهو المطلوب.

<u>ملاحظة:</u>

وبصورة عامة إذا كان لدينا $y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n$ حلولاً خاصة للمعادلة (4) فإن $y = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2 + \dots\dots\dots + \ell_n y_n$ هو أيضاً حل للمعادلة حيث $\ell_1, \ell_2, \dots\dots\dots, \ell_n$ ثوابت اختيارية . ونخلص إلى النظرية العامة التالية .

<u>نظرية -3-</u>

كل توافقية خطية من الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هي أيضاً حل لنفس المعادلة .

<u>نظرية -4-</u>

نظرية وجود انفراد الحل:-

سبق أن تكلمنا عن نظرية وجود انفراد الحل بالنسبة للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والثانية, وسنذكر الآن برهان نفس النظرية بالنسبة للمعادلات بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة n.

إذا كانت الدوال $\underline{p}_n(x)$,............, $\underline{p}_o(x), \underline{p}_1(x)$ و $g(x)$ مستمرة على مجال مـــا $\propto < x < \beta$ وكانت x_o نقطة من هذا المجال $Q_o, Q_1, ..., Q_{n-1}$ ثوابت حقيقيـــة فإنه يوجد حل واحد وواحد فقط معرف على المجال $\propto < x < \beta$ لمسألة القيم الحديـة التالية :-

$$y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + \underline{p}_o(x) y = o$$

$$y(x_o) = Q_o, y_1'(x_o) = Q_1, ..., y^{(n-1)}(x_o) = Q_{n-1}$$

2.XI: المعادلـة التفاضليـة الخطيـة المتجانسـة مـن المرتبـة n :

Homogenous Linear Differential Equations of order

أ- الرونسكيان **The Wronskian**

سبق أن رأينا إذا كانت $y_1, y_2, ..., y_n$ حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n :

$$L[y] = y^n + \underline{p}_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + \underline{p}_o(x) y = o \qquad (5)$$

فإن التوافقية الخطية

$$y = \ell_1 y_1(x) + \ell_2 y_2(x) + ... + \ell_n y_n(n) \qquad (6)$$

هي أيضاً حل للمعادلة حيث $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$ ثوابت اختيارية .

إذا كانت لدينا الشروط الابتدائية التالية:

$$y(x_o) = Q_o, \quad y'(x_o) = Q_1, ..., y^{(n-1)}(x_o) = Q_{n-1} \qquad (7)$$

فإنه من الممكن اختيار الثوابت $\ell_{11}, \ell_{21}, \dots\dots \ell_n$ حيث أن التوافقية الخطية (6) تحقق الشـــروط الابتدائيـــة (7) . وعلى وجه التخصيص من أجل أي نقطة x_o من المجال $\propto < x < \beta$ ومن أجل أي اختيار للثوابت $Q_o, Q_1, \dots\dots\dots\dots, Q_n$ فإنه يمكن تعييـــن المعاملات $\ell_1, \ell_2, \dots\dots\dots\dots, \ell_n$ إذا تحقق النظام التالي:-

$$y(x_o) = \ell_1 y_1(x_o) + \ell_2 y_2(x_o) + \dots\dots\dots\dots + \ell_n y_n(x_o) = Q_o$$

$$y'(x_o) = \ell_1 y_1'(x_o) + \ell_2 y_2'(x_o) + \dots\dots\dots + \ell_n y_n'(x_o) = Q_1 \qquad (8)$$

$$y^{(n-1)}(x_o) = \ell_1 y_1^{(n-1)}(x_o) + \ell_2 y_2^{(n-1)}(x_o) + \dots\dots\dots\dots + \ell_n y_n^{(n-1)}(x_o) = Q_{n-1}$$

الذي يمكن حلة بالنسبة للثوابت $\ell_1, \ell_2, \dots\dots\dots\dots, \ell_n$ ، ويستلزم هذا أن لا ينعدم محـــدد المعاملات. من جهة أخرى إذا كان محدد المعاملات معدوماً فإنه من الممكـــن دائمـــاً اختيار الثوابت $Q_o, Q_1, \dots\dots\dots, Q_{n-1}$ بحيث لا يقبل النظام حلاً. إذن الشرط الـــلازم والكافي لإيجاد حل للنظام (8) من أجل قيم اختيارية للثوابـــت $Q_o, Q_1, \dots\dots\dots, Q_{n-1}$ هو أن يكون الرونسكيان $W(y_1, y_2, \dots\dots, y_n)$ غير معدوم عند النقطة $x = x_o$. وبما أن x_o هي نقطة مكن المجال $\propto < x < \beta$ فإن الشرط يصبح أن $W(y_1, y_2, \dots\dots, y_n)$ غير معدوم على طول المجال $\propto < x < \beta$.

$$W(y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots, y_n \\ y_1', y_2', \dots\dots\dots\dots, y_n' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)} y_2^{(n-1)} \dots\dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq o \qquad \forall x \in]\propto_1, \beta[$$

وكما هو الحال بالنسبة للمعادلة من المرتبة الثانية، تكون لدينا النظرية التالية:

ب- نظرية – 5-

إذا كانت الدوال $p_o, p_1, \dots\dots\dots, p_n$ مستمرة على المجال المفتوح $\propto < x < \beta$ وكانت $y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n$ حلولاً خاصة للمعادلة (5) وكان $W(y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n) \neq o$ على الأقل عند نقطة من المجال $\propto < x < \beta$ فإن الحل العام للمعادلة (5) هو عبارة عن توافقية للحلول $y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n$.

ملاحظة:-

تسمى مجموعة الحلول $\langle y_1(n) \rangle_{1=1}^{n}$ بالمنظومة الأساسية للحلول أو قاعدة الحلول للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $L[y] = o$ على المجال $\propto < x < \beta$. والحل العام لهذه المعادلة هو توافقية خطية من دوال قاعدة الحلول.

ويمكن تعميم مفهوم الإستقلالية الخطية الذي ذكرناه في الفصل السابع. نقول عن الدوال $y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n$ أنها مستقلة خطية على المجال $\propto < x < \beta$ إذا وجدت مجموعة من الثوابت $\ell_1, \ell_2, \dots\dots\dots, \ell_n$ غير معدومة حيث :

$$\ell_1 y_1(x) + \ell_2 y_2(x) + \dots\dots\dots + \ell_n y_n(x) = o$$

على المجال $\propto < x < \beta$.

ومنه إذا كانت $y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n$ حلولاً للمعادلة (5) فأنه يمكن إثبات أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون هذه الحلول مستقلة خطياً هو أن $W(y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n) \neq o$ على المجال $\propto < x < \beta$.

وبالتالي دوال قاعدة الحلول للمعادلة (5) مستقلة خطياً، وأن مجموعة n الحلول للمعادلة (5) المستقلة خطياً تكون قاعدة الحلول للمعادلة (5).

جـ. المعادلة المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

Homogenous Equations with Constant Coefficients.

نطبق في هذه الفقرة ما قدمناه من مفاهيم ونظريات بغية الحصول على حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذوات المعاملات الثابتة. والصورة العامة لهذه المعادلة هي :-

$$(5) \qquad y^{n} + Q_{n-1}y^{(n-1)} + Q_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Q_{1}y' + Q_{0}y = o$$

حيث $Q_{n-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, Q_{1}, Q_{0}$ ثوابت اختيارية والتي سنفرضها حقيقية.

ولإيجاد n من الحلول المستقلة خطياً لهذه المعادلة نلاحظ أولاً أن هذه المعادلة هي علاقة خطية بين $y(x)$ ومشتقتها، والدالة التي يمكن أن تحقق مثل هذه الدالة هي الدالة الآسية e^{mx}. لكن لقيم خاصة أو مميزة للثابت m. لهذا نفرض حلاً للمعادلة (5) على الصورة :-

$$y = e^{mx} \Rightarrow y' = me^{mx}, \ldots\ldots, y^{(n)} = m^{n}e^{mx}$$

وبالتعويض عن y ومشتقتها في المعادلة (5) نجد أن .

$$L[e^{mx}] = [m^{n} + Q_{n-1}m^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + Q_{1}m + Q_{0}]e^{mx}$$

$$= Z(m)e^{mx} = o$$

ومنه يكون لدينا:-

$$(10) \qquad Z(m) = m^{n} + Q_{n-1}m^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a\ m + Q_{0} = o$$

وهذه المعادلة جبرية من الدرجة n في m وتسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n ذات المعاملات الثابتة.

ويسمى كثير حدود $Z(m)$ بكثير الحدود المميز وهو من الدرجة n ولـه n صفـر ، لتكن هذه الجذور هي $m_1, m_2, ..., m_n$.
وبالتالي يمكن كتابة كثير الحدود المميز من الصورة :

$$Z(m) = (m - m_1)(m - m_2).........(m - m_n)$$

1- جذور حقيقة ومتمايزة . Real and Unequal Roots

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة حقيقية ومختلفة عـن بعضـها البعـض فـإن المعادلة المميزة تأخذ الصورة :

$$Z(m) = \prod_{i=1}^{n}(m - m_i) = (m - m_1)(m - m_2)...(m - m_n) = o$$

وتكون قاعدة الحلول المرفقة للمعادلة التفاضلية هي : $\{y_i = e^{m_i x}\}_{i=1}^{n}$ ويكون الحـل العام الوحيد للمعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة في الصورة :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{m_i x}$$

$$y(x) = A_1 e^{m_1 x} + A_2 e^{m_2 x} + ... + A_n e^{m_n x}.$$

ويبقى إثبات أن دوال قاعدة الحلول مستقلة خطياً على المجال $\alpha < x < \beta$.
لنفرض أن هذه الدوال $\{y_i = e^{m_i x}\}_{i=1}^{n}$ مرتبطة خطياً ونبرهن أن هـذا يـؤدي إلـى تناقض. إذن فإنه يوجد n ثابت $c_1, c_2, ..., c_n$ ليست معدومة كلياً حيث :

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x} = o \qquad -\infty < x < \infty$$

بضرب المعادلة السابقة في e^{-m_1x} تصبح في الصورة :

$$c_1 + c_2e^{(m_2-m_1)x} + \dots\dots\dots\dots + c_ne^{(m_n-m_1)x} = o$$

باشتقاقها بالنسبة إلى x نجد أن :

$$(m_2-m_1)c_2e^{(m_2-m_1)x} + (m_3-m_1)c_3e^{(m_3-m_1)x} + \dots\dots\dots + (m_n-m_1)c_ne^{(m_n-m_1)x} = o$$

من أجل $-\infty < x < \infty$.

بضرب هذه المعادلة في $e^{-(m_2-m_1)x}$ ثم اشتقاقها بالنسبة إلى x نجد أن :

$$(m_3-m_2)(m_3-m_2)c_3e^{(m_3-m_2)x} + \dots\dots\dots\dots + (m_n-m_2)(m_n-m_1)c_ne^{(m_n-m_{n-1})x} = o$$

من أجل $-\infty < x < \infty$. ونستمر بنفس الطريق فنحدد في النهاية أن :-

$$(m_n-m_{n-1})(m_n-m_{n-2})\dots\dots\dots\dots(m_n-m_2)(m_n-m_1)c_ne^{(m_n-m_{n-1})x} = o$$

من أجل $-\infty < x < \infty$. وبما أن الدالة الآسية غير معدومة والجذور مختلفة عن بعضها البعض إذن $c_n = o$ ومنه يكون لدينا :

$$c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \dots\dots\dots + c_{n-1}e^{m_{n-1}x} = o$$

وبإعادة نفس الطريقة نحصل على $c_{n-1} = o$ وهكذا نجد أن :

$$c_{n-2} = \dots\dots\dots\dots = c_1 = o$$

وهذا يتناقض مع الفرض حيث أن $e^{m_1x},\dots\dots\dots,e^{m_nx}$ مرتبطة خطياً.

مثــال :-

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = o$

الحــل :-

المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة خطية متجانسة ذات معاملات ثابتـــة وتكــون المعادلة المميزة من الصورة :-

$$Z(m) = m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = o$$

ومنه :

$$Z(m) = (m+1)(m-2)(M+3) = O$$

إذن فجذور المعادلة المميزة هي $\{m_1, m_2, m_3\} = \{-1,2,3\}$ وعليــة تكــون مجموعــة الحلول المقابلة هي:-

$$\{y_1, y_2, y_3\} = \{e^{-x}, e^{2x}, e^{-3x}\}$$

ويكون الحل العام كما يلي :-

$$y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{2x} + A_3 e^{-3x}$$

2- جذور مركبة : Complex Roots

قد يكون للمعادلة المميزة بعض الجذور المركبة . لكننا نعلم أنه إذا كـــانت معـــاملات المعادلة المميزة حقيقية فإن جذورها المركبة ، إن وجدت ، توجد ترافقيـــا ، ليكــن m_s ، m_{s+1} جذرين مترافقين :

$$m_s = \propto + i\beta \quad , \quad m_{s+1} = \propto - i\beta$$

حيث $\propto$ و β ثابتان حقيقيان ، ويظهر الحلان المقابلان لهذين الجذرين المتوافقيــــن في الحل العام على الصورة: $A_s e^{m_s x} + A_{s+1} e^{m_{s+1} x}$ حيث A_{s+1}, A_s ثابتان اختياريــان، وكنا سبق أن رأينا في حالة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية أنه يمكن التعبير عن

الدوال المركبة $e^{(\propto+i\beta)x}$ بدلالة الدوال ذات القيم الحقيقية التالية:

$$e^{\propto x}\cos\beta x \qquad , e^{\propto x}\sin\beta x$$

أي :
$$B_s e^{\propto x}\cos\beta x + B_{s+1}e^{\propto x}\sin\beta x$$

ويلاحظ أن هناك دائما ثابتين اختياريين B_s , B_{s+1} أو A_s , A_{s+1} .

إذن إذا كان للمعادلة المميزة بعض الجذور المركبة فإنه من الممكن التعبير عن الحل العام بتوافقية خطية لحلول ذات قيم حقيقية.

مثال -2-

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y^{iv} - y = o$$

الحــل :-

المعادلة المعطاة خطية متجانسة من المرتبة الرابعة ومعاملاتها ثابتة :

بوضع $y = e^{mx}$ نحصل على المعادلة المميزة :

$$m^4 - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1) = o$$

وواضح أن جذورها هي : $m_1 = 1 \ , \ m_2 = -1 \ , m_3 = i \ , \ m_4 = -i$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y(x) = A_1 e^{x} + A_2 e^{-x} + A_3\cos x + A_4\sin x$$

3- جذور متكررة Repeated Roots

قد يحدث أن يتكرر أحد الجذور لمعادلة المميزة ℓ من المرات ، بمعنى أن يكون هناك عدد ℓ من الجذور المتساوية من بين العدد الكلي n لجذر المعادلة المميزة : $Z(m) = o$.

إذا كان هذا الجذر هو m_1 فما هي مجموعة الحلول المقابلة لهذا الجذر المتكرر، لقد سبق أن رأينا في حالة المعادلة من المرتبة الثانية إذا كان الجذر مضعف فإن الحلين المستقلين خطياً هما xe^{m_1x} و e^{m_1x} إذن فإنه يبدو من المعقول أن نتوقع إذا كان أحد جذور المعادلة $Z(m) = o$ وليكن m_1 متكرر ℓ مرة $(\ell < n)$ فإن :

$$e^{m_1x}, xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x^{\ell}e^{m_1x}$$

هي حلول للمعادلة قيد الحل. ولإثبات هذا نلاحظ إذا كان m_1 جذرا لامي من التعددية لكثير الحدود $Z(m)$ (أو جذراً إذا ℓ من الطيات) (أو جذراً من المرتبة ℓ) فإن :

$$L[e^{mx}] = e^{mx}(m - m_1)^{\ell}(m - m_{\ell+1})\ldots.(m - m_n)$$

$$= e^{mx}(m - m_1)^{\ell}H(m) \qquad \textbf{(ii)}$$

من أجل جميع قيم m حيث $H(m_1) \neq o$

وفيما يلي نستعمل الخاصية التالية $\frac{\partial}{\partial m}e^{mx} = xe^{mx}$ وأن أشتقاق الدالة e^{mx} بالنسبة إلى x و m يمكن استبدالهما . إذن باشتقاق المعادلة (ii) بالنسبة إلى m نحصل على:

$$L[xe^{mx}] = e^{mx}[x(m - m_1)^{\ell}H(m) + \ell(m - m_1)^{\ell-1}H(m) + (m - m_1)^{\ell}H'(m)]$$

من أجل $\ell \geq 2$ فإن الطرف الثاني للمعادلة (12) ينعدم من أجل $m = m_1$ ومنه فإن xe^{m_1x} هو حل للمعادلة قيد الحل .

إذا كان $\ell \geq 3$ فنشتق المعادلة (12) مرة أخرى بالنسبة إلى m ثم نعوض $m = m_1$ فنجد أن $x^2e^{m_1x}$ هو أيضاً حل للمعادلة .

ويمكن الاستمرار في هذه الطريقة إلى غاية الاشتقاق من الرتبة $(\ell - 1)$ ، الذي يعطي النتيجة المراده ، ونلاحظ أن المشتقة ℓ الطرف الثاني للمعادلة (ii) لا ينعدم من اجل $m = m_1$ لأن المشتقة ℓ للحد $(m - m_1)^\ell$ هي ثابت و $H(m_1) \neq o$. ومن المعقول أن نتوقع أن الحلول التالية :

$$e^{m_1x}, xe^{m_1x}, x^2e^{m_1x}, ..., x^{\ell-1}e^{m_1x}$$

مستقلة خطياً ونترك إثبات ذلك للقارئ .

وفي النهاية إذا كان أحد الجذور المركبة $\lambda + i\mu$ متكرراً ℓ مرة فإن الجذر المرافق $\lambda - i\mu$ يكون متكرراً ℓ مرة. ومن الحلول ذات القيم المركبة المرفقة يمكن إيجاد 2ℓ حلاً ذا قيم حقيقية بأخذ الأجزاء الحقيقية والتحليلية للحلول .

$$e^{(\lambda+i\mu)x}, xe^{(\lambda+i\mu)x}, x^2e^{(\lambda+i\mu)x}, ..., x^{\ell-1}e^{(\lambda+i\mu)x}$$

وهي عبارة عن دوال مستقلة خطياً وتكون من الصورة :

$$e^{\lambda x}\cos\mu x,\ e^{\lambda x}\sin\mu x,\ xe^{\lambda x}\cos\mu x, xe^{\lambda x}\sin\mu x, ...,$$

$$x^{\ell-1}e^{\lambda x}\cos\mu x, x^{\ell-1}e^{\lambda x}\sin\mu x$$

ومنه فإن الحل العام يمكن التعبير عنه بتوافقية خطية من n حلاً ذا قيم حقيقية .

مثال -3-

حل المعادلات التفاضلية التالية:-

-1 $y''' - y'' - y' + y = o$

-2 $y^{(4)} + 2y'' + y = o$

-3 $y^{(4)} + y = o$

الحل:-

1-هذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة معادلتها المميزة هي:-

$$m^3 - m^2 - m + 1 = o$$

وجذرها هي : $m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ m_3 = -1$

أي أن لها جذر ثنائي (1) وجذر آخر (1-) وبالتالي فالحل العام هو:

$$y = e^x(A_1 + A_2x) + A_3e^{-x}$$

2- هذه معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة معادلتها المميز هي:-

$$m^4 + 2m^2 + 1 = o$$

وجذورها هي: $m_1 = i, m_2 = i, m_3 = -i, m_4 = -i$

ويكون الحل العام من الصورة :

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x + A_3 x \cos x + A_4 x \sin x$$

3-هذه المعادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة ومعادلتها المميزة هي :-

$$m^4 + 1 = o$$

ونلاحظ أنه يمكن كتابة العدد 1− على الصورة التالية :-

$$-1=-1+io=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}=e^{i(\pi+2n\pi)}$$

حيث n عدد صحيح موجب أو سالب .

$$(-1)^{\frac{1}{4}}=e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})}=\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})$$

ونحصل على الجذور الأربعة بوضع $n=0,1,2,3$ وهم :

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

ويمكن التأكد أنه من أجل قيم أخرى لـــ n نحصل على نفس الجذر.

ويكون الحل العام من الشكل التالي:-

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[A_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+A_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}\left[A_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+A_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

XI -3- المعادلـــة التفاضليـــة الخطيـــة غيـــر المتجانســـة مـــن المرتبـــة n .

Nonhongenous Linear Differential Equations of n order

أ- الحل العام General Solution

نبحث الآن عن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبـــــة nوالتي تكون من الصورة :

$$L[y]=y^{(n)}+\underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots\dots\dots+\underline{p}_1(x)y'+\underline{p}_o(x)y=g(x) \qquad (13)$$

إذا كان y_{p_2}, y_{p_1} حلين خاصين للمعادلة (13) فإنه يكون لدينا بنـــاءاً علـــى خطيـــة المؤثر L أن :

$$L[y_{p_1} - y_{p_2}] = g(x) - g(x) = o \quad (14)$$

إذن الفرق بين حلين خاصين للمعادلة غير المتجانسة (13) هو حل للمعادلة المتجانسة والتي نحصل عليها من (13) باختزال الطرف الأيمن $g(x)$ إلى الصفـــر . وبمـــا أن الحل للمعادلة المتجانسة هو عبارة عن توافقيـــة خطيـــة مـــن دوال قـــاعدة الحلـــول $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ فإن أي حل للمعادلة (13)يمكن أن يكتب على الصورة :-

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + ... + A_n y_n(x) + y_p(x) \quad (15)$$

حيث y_p هو حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (13) وتسمى التوافقية الخطيـــة (15) بالحل العام للمعادلة غير المتجانسة (13).

تتمثل المسالة أولاً في إيجاد قاعدة الحلول $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ ثم إذا كانت المعـــاملات في المعادلة التفاضلية ثابتة فالمسألة على الوجه البسيط الملائم ويتـــم تعييـــن قـــاعدة الحلول كما بينا ذلك في الفترة السابقة ، وإذا كانت المعاملات غير ثابتة أي أنـــها دوال في المتغير المستقل x فإنه من الممكن استعمال طريقة المتسلسلات كما هـــو الحـــال بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة .

ب- تخفيض المرتبة لمعادلة تفاضلية خطية Reduction of order

يمكن استعمال طريقة تخفيض مرتبة المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n.

لنبحث عن قاعدة الحلول $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ للمعادلة (13).

ويمكن اختزالها إلى معادلة متجانسة بوضع $g(x) = o$ حيث نحن بصدد البحث عـــن قاعدة الحلول أي عن الحل المتجانس للمعادلة (13).

ليكن y_1 الحل الخاص للمعادلة (13) بدون طرف ثاني:-

$$y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + \underline{p}_1(x)y' + \underline{p}_o(x)y = o \qquad (16)$$

نضع الحل العام (المتجانس) على الصورة : $y = y_1.\vartheta(n)$

ومنه $y' = y_1'\vartheta + y_1\vartheta'$

$$y'' = y_1''\vartheta + 2y_1'\vartheta' + y_1\vartheta''$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)}\vartheta + ny_1^{(n-1)}\vartheta' + ... + y_1\vartheta^{n}$$

بالتعويض في المعادلة (16) نجد أن :

$$\vartheta^{(n)} + q_{n-1}(x)\vartheta^{(n-1)} + ... + q_1(x)\vartheta' = o \qquad (17)$$

حيث $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$ دوال جديدة في المتغير x وهي معادلة لا تحتوي على ϑ.

ولحلها نفرض: $\vartheta' = Y(x)$

فتصبح المعادلة من الصورة التالية :

$$Y^{(n-1)} + q_{n-1}Y^{(n-2)} + ... + q_1 Y = o$$

وهي من المرتبة $(n-1)$ ليكن حلها هو: $Y = Y(x)$

وبالرجوع إلى الدالة ϑ نجد أن :

$$\vartheta(x) = \int Y(x)dx + c$$

ومنه فإن الحل العام هو:-

$$y = cy_1 + \int Y(x)dx$$

حيث $Y(x)$ دالة في المتغير x وتحوي على (n-1) ثابت اختياري .

وبالمثل بالنسبة إلى y_1 و $(n-1)$ حل مستقل خطياً $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots\ldots, \vartheta_{n-1}$ للمعادلة المختزلة نجد قاعدة الحلول للمعادلة. (13)

$$y_1, y_1\vartheta_1, \ldots\ldots\ldots, y_1\vartheta_{n-1}$$

وإذا كان أحد حلول المعادلة المختزلة (17) معروفاً يمكن أيضاً استخدام طريقة تخصيص المرتبة مرة أخرى للحصول على معادلة من المرتبة $(n-2)$ وهكذا إلى غاية الحصول على المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى .

ومن جهة أخرى ، في الواقع أن طريقة تخفيض المرتبة نادراً ما تكون نافعة بالنسبة للمعادلات ذات المرتبة أكبر من الثانية. فإذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة المختزلة تكون على الأقل من المرتبة الثانية ونادراً ما تكون هذه المعادلة أسهل حل من المعادلة الأصلية .

جـ. طريقة المعاملات غير المعينة

The Method of Undetermined Coefficients

يمكن الحصول على الحل الخاص للمعادلة الخطية غير المتجانسة من المرتبة n ذات المعاملات الثانية بطريقة المعاملات غير المعينة ويعتمد شكل هذا الحل على شكل الدالة : $g(x)$.

$$L[y] = y^{(n)} + Q_{n-1}y^{(n-1)} + \dots\dots + Q_1 y' + Q_o y = g(x) \quad (18)$$

وتمتاز هذه الطريقة بيسرها وبساطتها مقارنة بطريقة تغيير البارامترات التي سنناقشها فيما بعد. لكن يعيبها محدوديتها حيث لا تنجح عموماً إلا لأنماط محدودة للدالة $g(x)$ من جانب وللمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة من جانب أخر, واقتراح شكل ما للحل الخاص ليس عملية تخمينية صرفة بل يعتمد على مجموعة قواعد محددة تعتمد بدورها على شكل الدالة $g(x)$. على أنه في بعض الحالات قد لا ينجح هذا الحل التجريبي تماماً في الحصول على حل خاص لكن بقليل من التمعن والتمحيص يمكن تعديل أو تحوير هذا الحل التجريبي ليؤدي إلى حل خاص نافع.

1-نأخذ أولاً الحالة التي يكون $g(x)$ عبارة عن كثير حدود من الدرجة m :

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots\dots + b_o$$

حيث $b_o, b_1, \dots\dots, b_m$ ثوابت معلومة. فإنه من الطبيعي أن نبحث عن الحل الخاص من الصورة :

$$y_p = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \dots\dots + A_o$$

بالتعويض عن y_p في المعادلة (18) ومساواة معاملات قوى x^m على الطرفين .

نجد أن:-

$$Q_o A_m = b_m$$

وبفرض أن $Q_o \neq o$ نجد أن :

$$A_m = b_m / Q_o$$

الثوابت $A_1, A_2, \dots\dots, A_{m-1}$ يمكن الحصول عليها من معاملات الحدود :-

$$x^o, x^1, \dots\dots, x^{m-1}$$

أما إذا كان $Q_o = o$ وكان حل المعادلة المتجانسة ثابتاً فإننا لا نستطيع الحصول على A_m، في هذه فإنه من اللازم فرض y_p على صورة كثير حدود من الدرجة $m+1$. وفي هذه الحالة فإنه ليس من اللازم أن يحتوي y_p على الحد الثابت.

وعموماً إنه من السهل التحقق إذا كان $1, x, x^2, ..., x^{s-1}$ حلولاً للمعادلة المتجانسة فإن الصورة الملائمة للحل الخاص هي:-

$$y_p(x) = x^s(A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_o)$$

2- لنأخذ الآن الحالة الثانية وهي إذا كان $g(x)$ على الصورة :

$$g(x) = e^{\propto x}[b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_o)$$

فإن الحل الخاص يكون من الشكل:

$$y_p = e^{\propto x}[A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_o$$

إذا لم يكن $e^{\propto x}$ حلا للمعادلة المتجانسة. أما إذا كان $\propto$ جذرا من الدرجة s للمعادلة المميزة فإن الصورة الملائمة للحل الخاص هي :

$$y_p(x) = x^s e^{\propto x}[A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_o]$$

وهذه النتيجة يمكن إثباتها. كما هو الحال بالنسبة للمعادلة الخطية غير المتجانسة، بوضع $y = e^{\propto x}U(x)$ تصبح U حلا للمعادلة الخطية غير المتجانسة من المرتبة n ذات معاملات ثابتة فيها الحد غير المتجانس عبارة عن كثير حدود ونترك إثبات ذلك للقارئ.

3- بالمثل إذا كان $g(x)$ على الصورة :

$$y(x) = e^{\alpha x}(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_o)\begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$$

فإن الصورة الملائمة للحل الخاص $y_p(x)$ هي:-

$$\begin{aligned} y_p(x) = e^{\alpha x}[A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_o]\cos \beta x \\ + e^{\alpha x}[B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + ... + B_o]\sin \beta x \end{aligned}$$

هذا إذا لم يكن $\alpha + i\beta$ جذرا للمعادلة المميزة أما إذا كـــان $\alpha + i\beta$ جـــذرا للمعادلـــة المميزة من الدرجة s فإنه من الضروري ضرب الطـــرف الثـــاني للمعادلـــة (19) فـــي x^s .

ونلخص النتائج السابقة في الجدول التالي:-

$g(x)$	$y_p(x)$
$\underline{p}_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_o$	$x^s[A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_o]$
$\underline{p}_m(x)e^{\alpha x}$	$x^s[A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_o]e^{\alpha x}$
$\underline{p}_m(x)e^{\alpha x}\begin{cases}\cos \beta x \\ \sin \beta x\end{cases}$	$x^s[(A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + ... + A_o)e^{\alpha x}\cos \beta x$ $+ (B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + ... + B_o)e^{\alpha x}\sin \beta x]$

جدول -1-

حيث S هو اصغر عدد صحيح موجب بحيث أن كل حد في y_p يختلف عن جميـــع حدود الحل المتجانس $y_h(x)$.

ملاحظـــة :-

إذا كان $g(x)$ عبارة عن مجموع الحالات الثالثة السابقة فإن من السهل دائمـــاً فـــي العملي حساب الحل الخاص المقابل لكل حد على حده، وبناءً علـــى مبـــدأ الـــتركيب للمعادلة التفاضلية الخطية يكون الحل الخاص الكلي عبـــارة عـــن مجمـــوع الحلـــول الخاصة لكل حد على حده.

مثال -4

جد الحل الخاص للمعادلة التالية:-

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

الحـــل :-

أولاً يجب البحث عن الحل المتجانس للمعادلة المتجانسة :

$$y''' - 4y' = o$$

وهي معادلة من المرتبة الثالثة ذات معاملات ثابتة.

المعادلة المميزة هي:- $m^3 - 4m = m(m^2 - 4) = o$

وجذورها هي : $m_1 = o, m_2 = 2, m_3 = -2$

ويكون الحل المتجانس من الصورة :

$$y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$$

باستعمال مبدأ التراكيب يمكن كتابة الحل الخاص للمعادلة قيد الحل على صورة مجموع الحلول الخاصة للمعادلات التالية:-

$$y''' - 4y' = x \quad , \quad y''' - 4y' = 3\cos x \, , \, y''' - 4y' = e^{-2x}$$

بالنسبة للمعادلة الأولى نفرض الحل من الصورة $y_{p_1} = A_1x + A_o$

وبما أن الثابت هو حل للمعادلة المتجانسة إذن نضرب في x :

$$y_{p_1} = x(A_1x + A_o)$$

بالنسبة للمعادلة الثانية نفرض الحل الخاص من الصورة :

$$y_{p_2}(x) = B\cos x + C\sin x$$

ولا تغير هذه الصيغة لأن $\cos x$ و $\sin x$ ليست حلول للمعادلة المتجانسة .

أما بالنسبة للمعادلة الأخيرة نلاحظ أن e^{-2x} هو حل للمعادلة المتجانسة لهذا نفرض الحل الخاص من الصورة

$$y_{p_3} = Dxe^{-2x}$$

ويتم تعيين الثوابت بالتعويض عن هذه الحلول الخاصة في المعادلة المقابلة لهما. فيكون لدينا:-

$$A_1 = -\frac{1}{8} \ , \ A_o = o \ \ B = o \ , \ C = -\frac{3}{5} \ , \ D = \frac{1}{8}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة قيد الحل هو:-

$$y_p(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{8}xe^{-2x}$$

د. طريقة تغيير البارامترات: The Method of Variation of Parameters

تمتاز طريقة تغيير البارامترات بعموميتها حيث يمكن تطبيقها علـــى جميــع أنــواع المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة سواء كانت ذات معاملات ثابتة أو متغيرة (أي دوال في المتغير x) وبصرف النظر عن نوع الطرف الأيمـــن $g(x)$ ، بعكــس الحال في طريقة المعاملات غير المعينة التي تطبق فقط في الحالات التي تكون فيـــها المعاملات ثوابت لأنماط معينة من الدوال $g(x)$. لكـــن يعيـــب طريقـــة تغيـــير البارامترات أنها :-

1- أكثر مشقة خصوصاً في حالة علو مرتبة المعادلة التفاضلية .

2- اعتمادها على معرفة الحل المتجانس والذي قد يكون معتذراً فـــي حالـــة كـــون المعاملات متغيرة.

2- تضمنها تكاملات قد يتعذر الحصول عليها على صورة مغلقة.

تكتب المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة على الصورة :-

$$\textbf{(20)} \quad L[y] = y^{(n)} + \underline{p}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + \underline{p}_1(x)y' + \underline{p}_o(x)y = g(x)$$

لنفرض أننا نعرف قاعدة الحلول $y_1, y_2, ..., y_n$ للمعادلة المتجانسة

إذن:- $y_h(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + ... + A_n y_n(x)$ **(21)**

وتتلخص طريقة تغيير البارامترات في فرض حل خـــاص للمعادلـــة الخطيـــة غـــير المتجانسة (20) على الصورة (21) لكن بعد تغيير الثوابت أو البارامترات $\{A_i\}$ إلى

دوال $\{\mu_i(x)\}$ ليكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانســـة علـــى الصورة :-

$$y_p(x) = \mu_1(x) y_1(x) + \mu_2(x) y_2(x) + ... + \mu_n(x) y_n(x) \qquad \textbf{(22)}$$

ويبقى تعيين الدوال $\{\mu_i(x)\}$ بحيث يحقق هذا الحل $y_p(x)$ المعادلة غير المتجانســـــة $L[y] = g(x)$. ولتعيين هذه الـــ n من الدوال الاختياريـــــة يلـــزم فـــرض n مـــن الشروط. وأحد هذه الشروط هي بالطبع أن يحقق الحل المفـــــروض (22) المعادلـــة التفاضلية المعطاة (20) أي $L[y] = g(x)$ أما باقي الشروط $(n-1)$ فيمكن اختيارهـــا بحيث يتيسر حساب الحل.

من المعادلة (22) نجد أن :

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i'(x) y_i(x) \qquad \textbf{(23)}$$

ونختار الشرط الأول من الصورة :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i' y_i = \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + ... + \mu_n' y_n = o \qquad \textbf{(24)}$$

وبالتالي تصبح المعادلة (23) من الصورة :

$$y' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\ (x) y_i'(x) = \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + ... + \mu_n y_n'$$

ونستمر بنفس الطريقة فتكون المشتقة من المرتبة (m) للحل y_p من الصورة:

$$(24)\quad y_p^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x) y_i^{(m)}(x) = \mu_1 y_1^{(m)} + \mu_2 y_2^{(m)} + ... + \mu_n y_n^{(m)}$$

حيث $m = o,1,........., n-1$

وتكون الشروط $(n-1)$ المتوالية بالنسبة للدوال $\{\mu_i\}$ هي:

$$(25)\qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i' y_i^{(m-1)} = \mu_1' y_1^{(m-1)} + \mu_2' y_2^{(m-1)} + ... + \mu_n' y_n^{(m-1)}$$

حيث $m = o,1,........., n-1$

والمشتقة n للدالة y_p هي:

$$(26)\quad y_p^{(n)} = (\mu_1 y_1^{(n)} + ... + \mu_n y_n^{(n)}) + (\mu_1' y_1^{(n-1)} + ... + \mu_n' y_n^{(n-1)})$$

في النهاية ، نفرض الشرط أن y_p يحقق المعادلة (21) . بالتعويض عن مشتقات y_p من المعادلة (24) و (26) في (21) ثم نجمع الحدود المتشابهة وباستعمال العلاقة $L[y_i] = o$ حيث $i = 1,2,........., n$

ونجد أن :

$$(27) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i' y_i^{(n-1} = \mu_1' y_1^{(n-1)} + \mu_2' y_2^{(n-1)} + \dots\dots\dots\dots + \mu_n' y_n^{(n-1)} = g(x)$$

وبإضافة هذه المعادلة إلى النظام (25) نحصل على n من المعادلات الخطية غير المتجانسة بالنسبة إلى $\mu_1', \mu_2', \dots\dots\dots, \mu_n'$:

$$(28) \qquad \left.\begin{array}{l} y_1\mu_1' + y_2\mu_2' + \dots\dots\dots\dots + y_n\mu_n' = o \\ y_1'\mu_1' + y_2'\mu_2' + \dots\dots\dots\dots + y_n'\mu_n' = o \\ y_1''\mu_1' + y_2''\mu_2' + \dots\dots\dots\dots + y_n''\mu_n' = o \\ \text{-------------------------------} \\ \text{-------------------------------} \\ y_1^{(n-1)}\mu_1' + y_2^{(n-1)}\mu_2' + \dots\dots\dots\dots + y_n^{(n-1)}\mu_n' = g(x) \end{array}\right\}$$

والشرط الكافي لوجود حل لجملة المعادلات (28) هو أن محدد المعاملات يكون غير معدوم من أجل قيم x. وفي هذه الحالة محدد المعاملات هو $W(y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots, y_n)$ الذي يختلف عن الصفر لأن $y_1, y_2, \dots\dots\dots, y_n$ حلول مستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة.

إذن فإنه من الممكن تعيين الدوال $\mu_1', \mu_2', \dots\dots\dots, \mu_n'$.

باستعمال قاعدة كرامير (Cramer) يمكن الحصول على حل المعادلات فنجد أن :

$$\mu'_m(x) = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)} \qquad , \quad m = 1,2,..........., n. \qquad (29)$$

حيث $W(x) = W(y_1, y_2, ..., y_n)$ و W_m هو المحدد الذي نحصل عليـــه فـــي المحدد $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ باستبدال العمود m بالعمود $(o, o, ..., o, 1)^+$

باستعمال هذه الصيغة يكون الحل الخاص من الصورة التالية:

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x) \int \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)} dx \qquad (30)$$

ويمكن اختصار الحسابات في عبارة y_p باستعمال متطابقة آبيل :

$$W(x) = W(y_1, y_2, ...y_n) = ce^{-\int p_{n-1}(x)dx} \qquad (31)$$

والثابت c يمكن تعيينه بحساب $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ عند نقطة مختارة ونترك إثبات ذلك للقارئ .

مثال –5–

باستعمال طريقة تغيير البارامترات ، جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية:–

$$y''' - y' = x$$

الحـــل :

نبحث أولاً عن الحل المتجانس للمعادلة المتجانسة $y''' - y' = o$ معادلتها المميزة هـــي $m^3 - m = o$.

وجذورها هي : $m_1 = o, m_2 = 1, m_3 = -1$

ويكون الحل المتجانس :

(i $\qquad y_h = A_1 + A_2e^x + A_3e^{-x}$

نفرض الحل الخاص للمعادلة قيد الحل على الصورة :

$$y_p = \mu_1(x) + \mu_2(x)e^x + \mu_3(x)e^{-x}$$

حيث $y_1 = 1, y_2 = e^x, y_3 = e^{-x}$

وتكون الشروط الثلاثة (28) في الصورة التالية :

$$\begin{aligned} 1\mu_1' + e^x\mu_2' + e^{-x}\mu_3' &= o \\ 0\mu_1' + e^x\mu_2' - e^{-x}\mu_3' &= o \\ 0\mu_1' + e^x\mu_2' + e^{-x}\mu_3' &= x \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

ويكون محدد هذا النظام كالتالي:

$$W(1, e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ o & e^x & -e^{-x} \\ o & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2 \neq o \ , \ \forall \mathrm{x}$$

إذن محصلة المعادلات السابقة تقبل حلاً غير الحل الصفر.

أي

$$\mu_1' = \frac{x}{W}\begin{vmatrix} o & e^x & e^{-x} \\ o & e^x & -e^{-x} \\ 1 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{x}{2}(-2) \Rightarrow \mu_1 = -\frac{x^2}{2}$$

$$\mu_2' = \frac{x}{W}\begin{vmatrix} 1 & o & e^{-x} \\ o & o & -e^{-x} \\ o & 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{x}{2}e^{-x} \Rightarrow \mu_2 = -\frac{1}{2}(x-1)e^{-x}$$

$$\mu_3' = \frac{x}{W}\begin{vmatrix} 1 & e^x & o \\ o & e^x & o \\ o & e^x & o \end{vmatrix} = \frac{x}{2}e^x \Rightarrow \mu_3 = -\frac{1}{2}(x-1)e^x$$

ويكون الحل الخاص من الصورة :

$$y_p = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x-1)e^{-x}e^x + \frac{1}{2}(x-1)e^x e^{-x}$$

$$y_p = -\frac{x^2}{2}$$

تمــــــاريــــــن

I – هل تكـوّن مجموعة الدوال المرفقة لكل معادلة تفاضلية الحل العــام للعادلــة المعطاة، ثم عين مجال صلاحية الحلول ثم اكتب صورة الحل العام:

$y''' - y'' - 10y' - 8y = o \qquad \{e^{-x}, e^{-2x}, e^{4x}\}$

$y^4 - y = o \qquad \{e^{x}, e^{-x}, \cos x, \sin x\}$

$y''' - y'' - y' + y = o \qquad \{e^{x}, e^{-x}, \cosh x\}$

$y''' - y'' - y' + y = o \qquad \{e^{x}, e^{-x}, xe^{x}\}$

$y''' - y' = x \qquad \left\{-\frac{1}{2}x^2, e^{-x}, 1, e^{x}\right\}$

$y^{(4)} - y = e^{-x} \qquad \left\{\cos x, \sin x, e^{x}, -\frac{1}{2}xe^{-x}, e^{-x}\right\}$

II – لنعتبر المعادلة الخطية الثابتة من المرتبة n :

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + a_n(x)y = o$$

حيث $a_i \ (i = 1,2,\dots\dots,n)$ دوال مستمرة على المجال I .

لنفرض أن $\phi_1, \phi_2, \dots\dots\dots, \phi_n$ هي n حل للمعادلة التفاضلية على المجال I.

أ- أثبت أن من أجل $n = 3$

$$W(\phi_1,\ldots\ldots\ldots,\phi_n)(x) = W(\phi_1,\ldots\ldots\ldots,\phi_n)(x_o)\exp[-\int_{x_o}^{x} a_1(s)ds\ ]$$

من أجل $x_o \in I$

ب- اثبت هذه العلاقة في الحالة العامة n

جـ- بين أنه إذا كانت المعاملات a_i ثوابت حقيقية فإن :

$$W(\phi_1,\ldots\ldots\ldots,\phi_n)(x) = W(\phi_1,\ldots\ldots\ldots,\phi_n)(x_o)\exp[-a_i(x - x_o)]$$

III- لنعتبر المعادلة :

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = o$$

حيث a_3, a_2, a_1 ثوابت حقيقية. نفرض أن $\{m_1, m_2, m_3\}$ هي مجموعة حلول المعادلة الجبرية:-

$$m^3 + a_1 m^2 + a_2 m + a_3 = o$$

أ- إذا كانت $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ فأثبت أن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو:

$y(x) = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} + ce^{m_3 x}$ حيث $-\infty < x < \infty$

ب- إذا كان $m_1 = m_2 \neq m_3$ فأثبت أن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية:

$y(x) = Ae^{m_1 x} + Bxe^{m_1 x} + ce^{m_3 x}$ حيث $-\infty < x < \infty$

جـ- إذا كان $m_1 = m_2 = m_3$ فأثبت أن الحل العام هو:

$y(x) = Ae^{m_1 x} + Bxe^{m_1 x} + cx^2 e^{m_1 x}$ حيث $-\infty < x < \infty$

د- في حالة $m_1 = m_2 = m_3$ جد a_3, a_2, a_1 بدلالة m_1

IV – جد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

1- $y''' - 5y'' - y' + 5y = 0$

2- $2y''' + y'' - y' = 0$

3- $y^{(4)} - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = 0$

4- $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$

5- $y^{(5)} - y''' = 0$

6- $y^{(5)} + 6y''' + 9y' = 0$

V– باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة . جد الحل الخاص لكل من المعـــادلات التفاضلية التالية:–

1- $y^{(4)} + 4y'' - 3y' + 10y = 7$

2- $2y^{(6)} + 5y^{(5)} - 4y''' = 9$

3- $y''' + y'' - 3y' = 5e^{4x}$

4- $y^{(4)} - 8y' = xe^{x}$

5- $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 2x^{2}$

VI- باستخدام طريقة تغيير البارامترات جد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية التالية:-

1- $y''' - y' = \cos x$

2- $y''' - y'' - y' + y = 2xe^{x}$

3- $y^{(4)} - y = \sin 2x$

4- $y''' + y' = \tan x$

5- $y''' - 3y'' - y' + 3y = 2x^{2}e^{x}$

VII- لنعتبر المعادلة التالية:

(1)- $L[y] = y''' + Q_1(x)y'' + Q_2(x)y' + Q_3(x)y = o$

حيث Q_3, Q_2, Q_1 دوال مستمرة على المجال I.

لنفرض أن $\{y_1(x), y_2(x)\}$ مجموعة دوال مستقلة خطياً وحلول للمعادلة (1). على المجال I.

أ- بين أن $L[\mu y_1] = o$ يعطي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية بالنسبة إلى μ'

ب- ليكن $\Im = \vartheta(y_2 / y_1)'$. خفض مرتبة المعادلة الخطية من المرتبة الثانية إلى معادلة من المرتبة الأولى.

جـ- تطبيق :

$$y''' - \frac{3}{x^3}y' + \frac{3}{x^3}y = o$$

$$x > o$$

و $y_2 = x \quad , \; y_1 = \frac{1}{x}$

الفصل الثاني عشر

تحويل لابلاس

The Laplace Transform

الفصل الثاني عشر

تحويل لابلاس

The Laplace Transform

XII. 1 مقدمة Introduction

سنتطرق في هذا الباب إلى دراسة إحدى الطرق الناجحة لحل المعادلات التفاضلية الخطية وتسمى هذه الطريقة بطريقة التحويلات التكاملية.

يعرف التحويل التكاملي بالعلاقة التالية:-

$$F(s)=\int_{\propto}^{\beta}K(s,x)f(x)dx \qquad (1)$$

حيث يتم تحويل الدالة $f(x)$ إلى دالة أخرى $F(s)$ بواسطة هذا التكامل وتسمى $F(s)$ تحويل الدالة $f(x)$ ، أما الدالة $K(s,x)$ تسمى نواة التحويل.

تتمثل الفكرة العامة في استعمال هذه العلاقة (1) لتحويل المسألة بالنسبة للدالة $f(x)$ إلى مسألة أخرى بسيطة إلى $F(s)$ التي يمكن حلها بسهولة ثم يمكن الحصول على الدالة المطلوبة $f(x)$ من خلال تحويلها إلى $F(s)$ ، وباختيار مرفق للنواة $K(s,x)$ ونهايتي التكامل $\beta,\propto$ فإنه من الممكن جوهرياً اختزال مسألة المعادلة التفاضلية الخطية إلى مسألة معادلة جبرية .

وسنقتصر على دراسة نوع خاص من هذه التحويلات التكاملية وبعض تطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الخطية, وهذا النوع هو تحويل لابلاس ، ويعرف تحويل لابلاس كما يلي:

$$L\{f(x)\}=F(s)=\int_{o}^{\infty}e^{-sx}f(x)dx \qquad (2)$$

حيث أن نواة التحويل هي :

$$K(s,x)=\begin{cases} e^{-sx} & , x\geq o \\ o & , x<o \end{cases}$$

وينفع هذا النوع من التحويلات لإيجاد الحال الخاص للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة وخاصة في حالة أن الحد المتجانس دالة غير مستقرة . ومن الملائم تعريف التحويل بالصورة التالية :-

$$\int_{o}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{o}^{A} f(x)e^{-sx}dx$$

حيث A عدد حقيقي موجب. إذا كان التكامل $\int_{o}^{A}$ موجوداً وكانت نهايته عندما $A\to\infty$ موجودة فنقول أن التكامل $\int_{o}^{\infty}$ متقارب وما عدا ذلك فنقول أن التكامل متباعد. وتلخص الأمثلة التالية هاتين الحالتين :

__مثال(1):__

إذا كانت $f(x)=e^{cx}$ من أجل $x\geq o$ ، c ثابت حقيقي غير معدوم أحسب:

$$\int_{o}^{\infty} e^{cx}dx$$

الحل:-

$$\int_{o}^{\infty} e^{cx}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{o}^{A} e^{cx}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{e^{cx}}{c}\Big|_{o}^{A}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}[e^{cA}-1]$$

وبالتالي فالتكامل متقارب إذا كان $c<o$ ومتباعد إذا كان $c>o$ أما إذا كان $c=o$ فإن $f(x)=1$ والتكامل متباعد أيضاً.

مثال (2):

إذا كانت $f(x)=\frac{1}{x}$ من أجل $x \geq 1$ أحسب $\int_1^{\infty} f(x)dx$

الحل :

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\ln A$$

وبما أن $\lim_{A\infty}\ln A=\infty$ إذن فالتكامل متباعد .

مثال (3):

إذا كانت $f(x)=x^{-p}$ من أجل $x \geq 1$ و P ثابت حقيقي و $P \neq 1$

أحسب $\int_1^{\infty} f(x)dx$

الحل :

$$\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}x^{-p}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1)$$

عندما $A\to\infty$ ، $A^{1-p}\to o$ إذا كان $p>1$ و $A^{1-p}\to\infty$ إذا كان $p<1$
إذن فالتكامل متقارب من أجل $p>1$ ومتباعد من أجل $p\leq 1$ وهذه النتائج مماثلة لنتائج المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$.

XII – 2 تعاريف ونظريات Definitions and Theorems

يجب وضع شروط على الدالة $f(x)$ لنضمن أن يكون التكامل المعرف بالعلاقة (2) متقارباً ، لهذا نعتبر الدوال $f(x)$ المعرفة من أجل $o<x<\infty$ والتي تتزايد تدريجياً بجوار $x=o$ حتى يكون التكامل متقارباً بجوار الصفر، ونعتبر أيضاً الدوال

التي تتزايد تدريجياً من أجل قيم x الكبرى حتى يكون التكامل متقارباً أيضاً عند اللانهاية ، كما يجب اعتبار الدوال القابلة للتكامل على جميع المجالات الجزئية للمجال $o < x < \infty$ ، ويؤدي بنا هذا إلى التعاريف التالية:

تعريف -1-:

نقول أن الدالة $f(x)$ المعرفة من أجل $o < x < \infty$ متزايدة أسياً عند اللانهاية إذا تحققت المتراجحه التالية:

$$\left|f(x) \leq Me^{cx}\right|$$ من أجل قيم x الكبرى.

حيث $M > o$ و c ثابتان حقيقيان.

تعريف -2-:

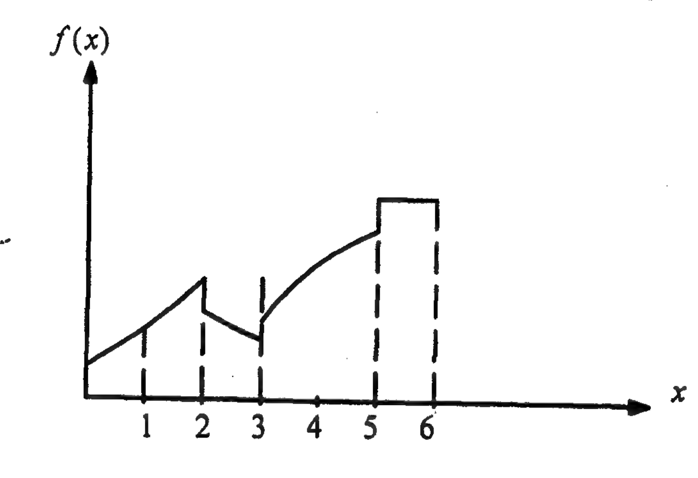
نقول أن الدالة $f(x)$ مستمرة بالقطع على المجال المغلق $a \leq x \leq b$ إذا كان من الممكن تجزئة هذا المجال إلى عدد محدود من المجالات الجزئية $c_i \leq x \leq d_i$ بحيث :

1- تكون الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المفتوح $c_i \leq x \leq d_i$

2- تكون كل من النهايتين $\lim_{x \to c^+} f(x)$ و $\lim_{x \to d^-} f(x)$ موجودتان.

مثال -4-

الدالة الموضحة في الشكل -1- هي دالة مستمرة بالقطع على المجال $o \leq x \leq b$



شكل - 1 -

تعريف -3-

نقول أن الدالة $f(x)$ من الصيف Δ إذا تحققت الشروط التالية:-

1- يجب أن تكون الدالة معرفة على المجال $o < x < \infty$.

2- يجب أن تكون الدالة قابلة للتكامل مطلقاً عند الصفر أي أن للتكامل

$$\lim_{S \to o^+} \int_s^a |f(x)| dx$$

موجود من أجل كل عدد صغير a موجب .

3- يجب أن تكون الدالة مستمرة أو مستمرة بالقطع على المجال $o < x < \infty$.

4- يجب أن تكون الدالة متزايدة آسياً عند اللانهاية.

مثال - 5 -

بين أن كل من الدوال:- $x^n, x, 1$ (n عدد صحيح موجب)، $\sin x$, $\cos x$, e^{3x}.

(حيث $\Im$ عدد موجب).

هي دوال من الصنف Δ .

وأن الدالة e^{x^2} ليست من الصنف Δ.

الحل:-

واضح أن كل من هذه الدوال محققة للشروط الثلاثة الأولى المذكورة في التعريف 4-

ويبقى تحقيق الشرط الرابع:-

لنحسب:-

$$\lim_{x \to \infty} [e^{-cx} . x^n] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^{cx}}$$

إذا كان $c > o$ فإنه يمكن حساب هذه النهاية بطريقة هوبتال

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^{cx}} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{ce^{cx}} = \dots\dots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{c^n e^{cx}} = o$$

إذن الدالة x^n من أجل n عدد صحيح موجب متزايدة أسياً عند اللانهاية من أجل c ثابت موجب.

يمكن التأكد بنفس الطريقة أن كل من الدوال :

$$\sin x, \cos x, e^{3x}$$

هي دوال من الصنف Δ،

أما بالنسبة للدالة e^{x^2} فهي ليست متزايدة أسياً عند اللانهاية لأن :

$$\lim_{x\to\infty}[e^{-cx}.e^{x^2}] = \infty \quad , \quad \forall C$$

وبالتالي فهي ليست من الصنف Δ.

نظرية -1-

إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ فإن تحويل لابلاس $L\{f(x)\} = F(s)$ المعـروف بالعلاقة (2) موجود.

البرهان:

يعطي تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ بالعلاقة (2).:

$$L\{f(x)\} = F(s) = \int_o^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

ويمكن تجزئة هذا التكامل إلى عدة أجزاء:

$$\int_o^\infty e^{-sx} f(x)dx = \int_o^\delta e^{-sx} f(x)dx + \int_\delta^{x_o} e^{-sx} f(x)dx + \int_{x_o}^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

حيث $x_o < o$ و $\delta > o$.

- من أجل $x < \delta$ ، الدالة $\left|e^{-sx}\right|$ محدودة وبما أن $f(x)$ من الصنف Δ فهي إذن قابلة للتكامل مطلقاً عند الصفر إذن التكامل:

$$\int_{o}^{\delta}\left|e^{-sx} f(x)\right| dx$$ متقارب من أجل $\delta > o$.

وبما أن $f(x)$ دالة متزايدة أسياً عند اللانهاية فإن :

$$\left|e^{-sx} f(x)\right| \leq M e^{-(s-c)x}$$

وبالتالي من أجل $s > c$ يكون لدينا:

$$\left|\int_{x_o}^{x} e^{-sx} f(x) dx\right| \leq \int_{x_o}^{\infty}\left|e^{-sx} f(x)\right| dx \leq M \int_{x_o}^{\infty} e^{-(s-c)x} dx \leq \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)x_0}$$

إذن فالتكامل $\int_{o}^{s}\left|e^{-sx} f(x)\right| dx$ متقارب.

- بما أن الدالة $f(x)$ مستمرة بالقطع على المجال $\delta < x < x_o$ فإن التكامل $\int_{x_o}^{x_o}\left|e^{-sx} f(x)\right| dx$ متقارب .

وهكذا يكتمل برهان النظرية .

<u>ملاحظات:-</u>

1- إذا كان s عدداً مركباً فإن تكامل تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ من الصنف Δ يكون متقارباً من أجل $\mathrm{Re}(s) > o$.

2- نلاحظ أن تحويل لابلاس هو عبارة عن مؤثر يلحق الدالة $F(s)$ بالدالة $f(x)$ أي:

$$F(s) = L\{f(x)\}$$

وهو مؤثر خطي أي:-

$$\forall c_1 , c_2 , \in \Re \quad , \quad L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\}$$

ونترك إثبات هذا للقارئ.

XII ـ 3 تحويل بعض الدوال البسيطة Transforms of Elementary Functions

يمكن حساب تحويلات لابلاس لبعض الدوال البسيطة كالدوال الأسية والمثلثية وكثيرات الحدود.

مثال -6-

لتكن $f(x)$ دالة ذات قيم مركبة ومن الصنف Δ .

$$f(x) = \mu(x) + i\vartheta(x)$$

حيث μ, ϑ دالتين حقيقيتين.

جد تحويل لابلاس للدالة $f(x) = e^{\Im x}$ حيث $\Im = \propto + i\beta$. و $\propto, \beta \in R^2$ و $i^2 = -1$

الحــل:

بما أن L مؤثر خطي فإن :

$$L\{f(x)\} = L\{\mu(x) + i\vartheta(x)\} = L\{\mu(x)\} + iL\{\vartheta(x)\}$$

ومنه:

$$L\{e^{\Im x}\} = L\{e^{\propto x} e^{i\beta x}\} = L\{e^{\propto x} \cos \beta x + i e^{\propto x} \sin \beta x\}.$$

$$L\{e^{\Im x}\} = \int_o^\infty e^{-sx} e^{\Im x} dx = \frac{-e^{-(s-\Im)x}}{s-\Im}\Big|_o^\infty = \frac{1}{s-\Im}$$

$$=\frac{1}{s-\propto-i\beta}=\frac{s-\propto+i\beta}{(s-\propto)^2+\beta^2}$$

إذا كان s حقيقياً فإن :

$$L(e^{\propto x}\cos\beta x)=\frac{s-\propto}{(s-\propto)^2+\beta^2}$$

$(\operatorname{Re} s>\propto)$

$$L(e^{\propto x}\sin\beta x)=\frac{\beta}{(s-\propto)^2+\beta^2}$$

- إذا كان $\propto=o$ فإن :

$$L\{\cos\beta x\}=\frac{s}{s^2+\beta^2}\quad,\ L\{\sin\beta x\}=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\quad,\ (\operatorname{Re} s>\propto)$$

إذا كان $\beta=o$ فإن :

$$L\{e^{\propto x}\}=\frac{1}{s-\propto}\qquad,\qquad s>\propto$$

إذا كان $\propto=0\ ,\ \beta=0$ فإن :

$$L\{1\}=\frac{1}{s},s>o$$

مثال -7-

جد $L\{x^n\}$ حيث n عدد صحيح موجب.

الحل :-

يكون لدينا من تعريف لابلاس ما يلي:-

$$L\{x^n\} = \int_o^\infty x^n e^{-sx} dx$$

بإجراء التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$L\{x^n\} = \frac{-x^n e^{-sx}}{S}\Big|_o^\infty + \frac{n}{s}\int_o^\infty x^{n-1} e^{-sx} dx$$

من أجل $s > o$ و $n > o$ فإن :-

$$L\{x^n\} = \frac{n}{s} L\{x^{n-1}\} \quad , \quad s > o$$

ومن هذه العلاقة يمكن استنتاج من أجل $n-1$ ما يلي :-

$$L\{x^{n-1}\} = \frac{n-1}{s} L\{x^{n-2}\}$$

إذن

$$L\{x^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} L(x^{n-2})$$

وبإعادة العملية ينتج :

$$L(x^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} L(x^{n-2})$$

وبإعادة العملية ينتج :

$$L\{x^n\} = \frac{n(n-1)(n-2).......2.1}{s^n} L\{x^o\}$$

ولدينا من المثال -6- أن :

$$L\{x^o\} = L\{1\} = s^{-1}$$

إذن :

$$L\{x^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s>o$$

مثال -8-

جد تحويل لابلاس للدالة :

$$f(x)=\begin{cases} x & o<x<4 \\ 5 & x>4 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند $x=o$ ، $x=4$ ولكن:

$$L\{f(x)\}=\int_o^\infty e^{-sx}f(x)dx=\int_o^4 e^{-sx}xdx+\int_4^\infty e^{-sx}5dx$$

$$=[-\frac{x}{s}e^{-sx}-\frac{1}{s^2}e^{-sx}]_o^4+[-\frac{5}{s}e^{-sx}]_4^\infty$$

إذن :

$$Z\{f(x)]=\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{e^{-4s}}{s^2}$$

XII ـ4. مشتقـات التحويـلات Derivatives of Transforms

بناءً على نظرية التفاضل فأنه من الممكن الاشتقاق تحت تكامل تحويل لابـــلاس لأن الدالة $f(x)$ دالة من الصنف Δ أي يمكن اشتقاق الدالة $F(s)$:

$$F(s)=\int_o^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

ومنه يكون:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_{o}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx = \int_{o}^{\infty} e^{-sx}[-xf(x)]dx \qquad (3)$$

وبما أن الدالة $f(x)$ هي دالة من الصنف Δ فإنها تتزايد أسياً عند اللانهاية أي

$$|f(x)| \le Me^{cx}, \quad M > o, x \ge x_o$$

إذن :

$$|xe^{-sx} f(x)| \le Mxe^{-(s-c)x}$$

ومنه يكون التكامل في العبارة (3) متقارباً من أجل $s > c$ وهي تمثل تحويل لابـلاس $-xf(x)$. وبهذا نكون قد قدمنا برهان النظرية التالية:-

نظرية -3-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ و $F(s) = L\{f(x)\}$

فإن الدالة $xf(x)$ من الصنف Δ ويكون .

$$F'(s) = L\{-xf(x)\} \qquad (4)$$

نتيجة (1)

في الواقع يمكن إعادة نفس الطريقة ونفس التحليل للأشتقاق تحت التكـــامل فنحصـــل على:

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \int_{o}^{\infty} e^{-sx} x^k f(x)dx \qquad (5)$$

أي إذا كانت $f(x)$ من الصنف Δ فإن الدالة $(-1)^k x^k f(x)$ من الصنف Δ وتحويـل لابلاس لهذه الدالة يعطي بالعبارة التالية :

$$L\{x^k f(x)\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} L\{f(x)\} \quad , \qquad k = 1,2,...... \tag{6}$$

<u>ملاحظات:</u>

1- يمكن استعمال هذه النتيجة لتبسيط حساب بعض التحويلات وإحدى تطبيقاتها هي:

أ- إذا أخذنا $f(x) = 1$ فإن :

$$L\{x^k\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}[\frac{1}{s}] = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad , \quad s > o \quad , \quad k = 1,2,.......$$

ب- إذا أخذنا $f(x) = e^{\Im x}$ حيث $\Im = \propto + i\beta$ و $\propto, \beta \in \Re$ فإن :

$$L\{x \ e^{\Im x}\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} L\{e^{\Im x}\} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}[\frac{1}{s - \Im}]$$

$$= \frac{k!}{(s - \Im)^{k+1}} \quad , \quad \Re s > \Re\Im, \qquad k = 1,2,.......$$

ويمكن استنتاج من هذه العبارة العلاقات التالية:-

جـ- $$L\{x^k e^{\propto x} \cos \beta x\} = \frac{k! \Re[(s - \propto) + i\beta]^{k+1}}{[(s - \propto)^2 + \beta^2]^{k+1}}$$

د- $$L\{x^k e^{\propto x} \sin \beta x\} = \frac{k! \mathrm{I}[(s - \propto) + i\beta]^{k+1}}{[(s - \propto)^2 + \beta^2]^{k+1}}$$

هـ- $$L\{x^k \cos \beta x\} = \frac{k! \Re(s + i\beta)^{k+1}}{(s^2 + \beta^2)^{k+1}}$$

و- $$L\{x^k \sin \beta x\} = \frac{k! \mathrm{I}(s + i\beta)^{k+1}}{(s^2 + \beta^2)^{k+1}}$$

2- نلاحظ من العبارتين التاليتين:

$$L\{1\}=\frac{1}{s} \quad , \quad s>0$$

$$L\{e^{\Im x}\}=\frac{1}{s-\Im} \quad , \quad \Re s>\Re\Im$$

أنه من الممكن الحصول على تحويل لابلاس لحاصل ضرب دالة ما في دالـــة آســـية وذلك بإجراء انسحاب في المتغير s , وفي الواقع هذه خاصية عامة نلخصـــــها فـــي النظرية التالية:

نظرية -4-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ و $F(s)=L\{f(x)\}$ فإن :

$$L\{e^{a\Im}f(x)\}=F(s-a), \quad a\in C \qquad (7)$$

البرهان :-

نبدأ أولا بإثبات أن الدالة $e^{a\Im}f(x)$ من الصنف Δ. ويكفي إثبات أن $e^{a\Im}f(x)$ دالـــة متزايدة أسيا عند اللانهاية . بما أن $f(x)$ من الصنف Δ فإن :

$$|f(x)|\le Me^{cx} \quad , \ M>o \quad , \ c\in\Re$$

إذا كان $\propto=\Re a$ فإن :

$$|e^{ax}f(x)|\le Me^{(\propto+c)x}=Me^{bx} \quad , \ b\in\Re$$

إذن $e^{ax}f(x)$ دالة في الصنف Δ، وتحويل لابلاس هذه الدالة يمكن حسابه مباشـــرة من :-

$$L\{e^{ax}f(x)\} = \int_{o}^{\infty} e^{-sx}e^{ax}f(x)dx = \int_{o}^{\infty} e^{-(s-a)x}f(x)dx$$

$$= F(s-a)$$

وهـــو المطلـــوب .

مثال -9-

باستعمال نتيجة هذه النظرية جد :-

$$L\{e^{\propto x}\cos\beta x\}\ ,\ Z\{e^{\propto x}\sin\beta x\}$$

الحل:-

لدينا: $$L\{\sin\beta x\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

و: $$L\{\cos\beta x\} = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

إذن : $\Re s > \propto$ $$L\{e^{\propto x}\sin\beta\} = \frac{\beta}{(s-\propto)^2+\beta^2}$$

و $\Re s > \propto$ $$L\{e^{\propto x}\sin\beta\} = \frac{\beta}{(s-\propto)^2+\beta^2}$$

XII. تـحـويـــلات المشتقـــات Transforms of Derivatives

تكمن أهمية تحويل لابلاس في إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الخطية, وتتعلق هـــذه المسألة بمعرفة تحويل لابلاس لمشتقة المتغير التابع، الذي يمكن تعيينه بدلالة تحويـــل لابلاس للمتغير التابع.

__نظرية -5-__

لتكن f دالة من الصنف Δ ومشتقتها هي أيضا من الصنف Δ ، وليكن تحويل لابلاس للدالة f هو $F(s)=L\{f(x)\}$ إذن:

$$L\{f'(x)\}=sF(s)-f(o) \qquad (8)$$

البرهان:

نطبق ببساطة تعريف تحويل لابلاس والتكامل بالتجزئة فنجد أن :

$$L\{f'(x)]=\int_o^{\infty}e^{-sx}f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int_o^{A}e^{-sx}f'(x)dx$$

$$=\lim_{A\to\infty}\{e^{-sx}f(x)\Big|_o^A+\int_o^{a}se^{-sx}f(x)dx\}$$

$$=-f(o)+s\int_o^{\infty}e^{-sx}f(x)dx \quad =sF(s)-f(o)$$

حيث قد استعملنا في الواقع أن $\lim_{A\to\infty}e^{-sA}f(A)=o$ حيث $\Re s>o$.

__ملاحظة:-__

يمكن تعميم نتيجة النظرية (5) بسهولة لتشمل المشتقات ذات الرتب العليا، لهذا نعتبر Δ^k صنف من الدوال بحيث تكون هذه الدوال ومشتقاتها حتى الرتبة k مستمرة على المجال $o<x<\infty$ وحتى الصنف Δ (حيث k عدد صحيح موجب).

وبالتالي تكون فرضية النظرية (5) هي أن $f(x)$ دالة من الصنف Δ^1 .

نظرية -6-

إذا كانت الدالة f من الصنف Δ^k حيث k عدد صحيح موجب ، وإذا كان تحويل لابلاس للدالة f هو $F(s)$ إذن :

$$L\{f^{(n)}(x)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(o)-s^{n-2}f'(o)-.......-sf^{(n-2)}(o)-f^{(n-1)}(o) \quad (9)$$

حيث $n=1,2,.......,k$

البرهان :

تثبت هذه النظرية باستعمال البرهان بالتراجع على n من أجل k ثابت ، وتذكر أن طريقة التراجع لا يمكن تنفيذها من اجل $n>k$ لأن الفرضيات لا تتضمن وجود تحويلات لابلاس للمشتقات ذات الرتب أعلى من الرتبة k.

في حالة $n=1$ نحصل على نتيجة النظرية -5- .

فإذا فرضنا أن المعادلة صحيحة من أجل n أي بالنسبة $f^n(x)$ فإنة يمكن كتابة $f^{(n+1)}(x)$ التي هي المشتقة الأولى للدالة $f^{(n)}(x)$ بتطبيق النظرية -5- نجد أن :

$$L\{f^{(n+1)}(x)\}=sL\{f^{(n)}(x)\}-f^{(n)}(o)$$

$$=s[s^nF(s)-s^{n-1}f(o)-..........-f^{(n-1)}(o)]-f^{(n)}(o)$$

$$=s^{n+1}F(s)-s^nf(o)-..........-sf^{(n-1)}(o)-f^{(n)}(o)$$

وهذه هي المعادلة قيد الإثبات مع تغيير n إلى $n+1$ إذن النظرية -6- قد تم إثباتها بطريقة التراجع.

وتعتبر هذه النظرية -6- هي القاعدة في استعمال تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعادلات الثابتة وفي ما يلي سنعطي بعض الأمثلة البسيطة لتوضيح هذه الفكرة.

مثال -10-

جد الحل $\phi_o(x)$ للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى الثابتة:

$$y' + ay = o$$

الذي يحقق الشرط الابتدائي التالي: $\phi_o(o) = y_o$ حيث y_o , a ثابتان اختياريان.

الحل :-

حل هذه المعادلة هو : $y = y_o e^{-ax}$ حيث y_o ثابت اختياري ، ونلاحظ أن هذه الدالة من الصنف Δ^1 . لنبحث عن هذا الحل بطريقة تحويل لابلاس.

ليكن : $$Y_o(s) = L\{\phi_o\}$$

إذن : $$L\{\phi_o'\} = sY_o(s) - \phi_o(o)$$

وبما أن L مؤثر خطي فإن :

$$L\{\phi_o' + a\phi_o'\} + aL\{\phi_o\} = o$$

أي : $$sY_o(s) - \phi_o(o) + aY_o(s) = o$$

أو: $$Y_o(s) = \frac{y_o}{s + a}$$

وتبقى المشكلة الوحيدة هي أيجاد الدالة $\phi_o(x)$ التي تحويلها هو $Y_o(s)$ ولقد سبق أن رأينا في الأمثلة السابقة أن :

$$L\{e^{-ax}\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad s > 0$$

إذن :

$$\phi_o(x) = y_o e^{-ax}$$

ونلاحظ أن الدالة $\phi_o(x)$ هي من الصنف Δ^1.

مثال-11-

باستخدام طريقة تحويل لابلاس ، جد حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة التالية:

$$y' + ay = f(x)$$

والذي يحقق الشرط التالي :

$$y(o) = y_o$$

الحـــل :-

لنفرض أن الدالة $f(x)$ هي من الصنف Δ وبالتالي يمكن حل هذه المعادلة بطريقة تحويل لابلاس حيث أن y هي دالة أيضا من الصنف Δ^1 ، وليكن :

$$L\{y\} = Y(s)$$

و

$$L\{f(x)\} = F(s)$$

وتتحول المعادلة التفاضلية السابقة إلى معادلة جبرية من الصورة :

$$Y(s) = \frac{y_o}{s+a} + \frac{F(s)}{s+a}$$

ويبقى الآن معرفة الدالة $y(x)$ انطلاقا من معرفة تحويلها $y(s)$ ، وليس لدينا طريقة واضحة إلى الآن لإيجاد التحويل العكسي، وسندرس هذه المسألة في الفقرات الموالية . كما سنثبت بعدها أن الحل يكون من الصورة التالية:

$$y(x) = -y_o e^{-ax} + \int_o^x e^{-a(x-\mu)} f(\mu) d\mu.$$

حيث أن :

$$L\left\{\int_o^x e^{-a(x-\mu)} f(\mu) d\mu\right\} = \frac{F(s)}{s+a}$$

<u>**مثال -12-**</u>

جد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + 2xy = \sin x \quad , \quad y(o) = y_o$$

الحل:-

نلاحظ أن في المثالين السابقين ، كان لدينا معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة. ولكن في هذه الحالة المعادلة التفاضلية خطية ولكن ذات معاملات متغيرة.

باستعمال طريقة الفصل الثاني يمكن الحصول على حل لهذه المعادلة من الصورة التالية:-

$$y(x) = y_o e^{-x^2} + e^{-x^2} \int_o^x e^{s^2} \sin s \, ds$$

أما باستخدام طريقة تحويل لابلاس فأنه يمكن تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة أخرى من الصورة :

$$sZ(s) - y(o) - 2Z'(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

حيث : $Z(s) = L\{y(x)\}$.

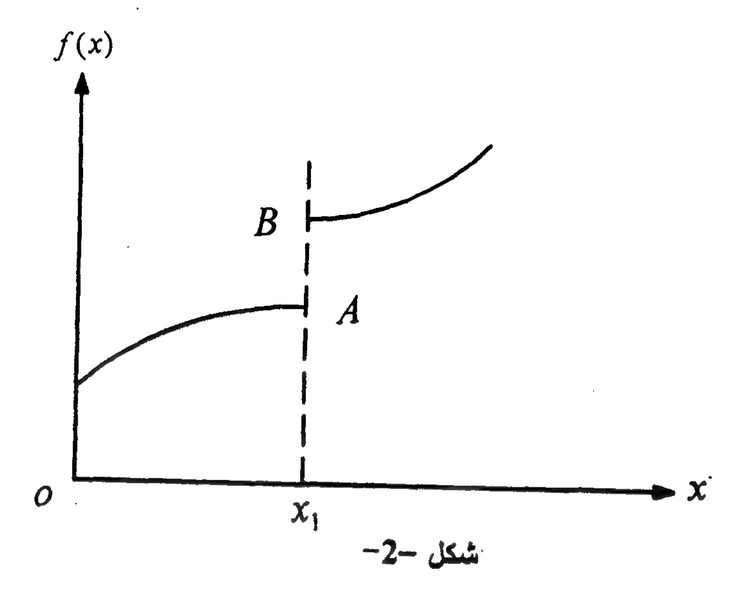
وهي عبارة عن معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى وليست أبسط من المعادلة الأصلية.

إذن يوضح هذا المثال أن طريقة لابلاس لا تجدي نفعاً في حالة المعادلات التفاضلية غير الخطية أو الخطية ذات المعاملات المتغيرة.

<u>ملاحظة :</u>

إذا كانت الدالة $f(x)$ غير مستمرة فإنه لا يمكن الحصول على تحويل لابلاس للدالة $f'(x)$ من العبارة (8) . ويجب الأخذ بعين الاعتبار إضافة بعض الحدود في هذه العبارة .

على سبيل المثال نأخذ الدالة $f(x)$ المبينة في الشكل التالي:-



شكل -2-

إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ^{1} فإنه يمكن حساب تحويل لابلاس بالصورة التالية:-

$$L\{f'(x)\} = \int_{o}^{\infty} e^{-sx} f'(x)dx = \int_{o}^{x_1} e^{-sx} f'(x)dx + \int_{n_1}^{\infty} e^{-sx} f'(x)dx$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئة نجد أن :

$$L\{f'(x)\} = e^{-sx} f(x)\Big|_{o}^{x_1} + s\int_{o}^{x_1} e^{-sx} f(x)dx + e^{-sx} f(x)\Big|_{x_1}^{\infty} + s\int_{x_1}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

$$= s\int_{o}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx + e^{-sx_1} f(x_1^{-}) - f(o) - e^{-sx_1} f(x_1^{+})$$

$$= sL\{f(x)\} - f(o) - e^{-sx_1}[f(x_1^{+}) - f(x_1^{-})]$$

حيث : $f(x_1^{+}) - f(x_1^{-}) = AB$

وبهذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية :-

نظرية -7-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ^1 ومستمرة من أجل $x \geq o$ عدا عند النقطة $x = x_1$ وإذا كان تحويل لابلاس لهذه الدالة $f(x)$ هو:

$$L\{f(x)\} = F(s)$$

فإن :

$$L\{f'(x) = sF(s) - f(o) - e^{-sx_1}[f(x_1^{+}) - f(x_1^{-})] \qquad \textbf{(10)}$$

ملاحظة:-

إذا كان للدالة $f(x)$ عدة نقطة اتصال فإنه يجب إضافة حدود مشابهة للحدود التي أضفناها في العبارة (10).

يمكن الحصول على تحويل لابلاس لقوى x غير الصحيحة وذلك باستعمال دالة مـــا ليست معرفة في الرياضيات الأولية تسمى دالة جاما .

تعرف الدالة جاما بالعبارة التالية :

$$\Gamma(x)=\int_{o}^{\infty}e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta \quad , \quad x>o \tag{11}$$

وبتعويض $(x+1)$ بدل x في العبارة (11) نجد أن :

$$\Gamma(x+1)=\int_{o}^{x}e^{-\beta}\beta^{x}d\beta \tag{12}$$

وبإجراء التكامل بالتجزئة نجد ما يلي :

$$\Gamma(x+1)=-e^{-\beta}\beta^{x}\Big|_{o}^{\infty}+x\int_{o}^{\infty}e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta \tag{13}$$

وبما أن $x>o$ إذن $\beta^{x}\to o$ عندما $\beta\to o$ ومنه يكون:

$e^{-\beta}\beta^{x}\to o$ عندما $\beta\to\infty$

ونستنتج أن :

$$\Gamma(x+1)=x\int_{o}^{\infty}e^{-\beta}.\beta^{x}d\beta=x\Gamma(x) \tag{14}$$

<u>**نظرية -8-**</u>

من أجل $x>o$ فإن $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

ملاحظة :-

في حالة n عدد صحيح يمكن استعمال عبارة النظرية -8- فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &------------ \\ &= n(n-1)(n-2)......2\Gamma(2) \\ &= n!\Gamma(1)\end{aligned}$$

ولكن: $$\Gamma(1) = \int_o^\infty e^{-\beta}\beta^o!\beta = -e^{-\beta}\int_o^\infty \quad = 1$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية -9-

من أجل n عدد صحيح موجب فإن $\Gamma(n+1) = n!$

ملاحظة:

بوضع $\beta = st$ حيث $s > o$ في عبارة التكامل (14) نحصل على :

$$\Gamma(x+1) = \int_o^\infty e^{-st}s^x t^x s dt = s^{x-1}\int_o^\infty e^{-st}t^x dt$$

حيث $x+1 > o$ ومنه يكون:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} = \int_o^\infty e^{-st}t^x dt \quad , \quad s > o \quad , \quad x > -1$$

وواضح أن الطرف الثاني هو عبارة تحويل لابلاس للدالة t^x ومنه فإن :

$$L\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \qquad (15)$$

وإذا أخذنا $x = -1/2$ نجد أن:

$$L\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}$$

ومنه نستنتج أن :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = s^{1/2} L\{t^{-1/2}\} = s^{1/2}\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \sqrt{\pi}$$

XII_7. الدالة الدورية — Periodic Functions

نعتبر الدالة $f(x)$ دالة دورية ودورها X :

$$f(x+X) = f(x) \qquad (16)$$

وتكون الدالة معرفة تماماً إذا كانت معرفة خلال دور واحد $o \le x < X$. وإذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ فإن :-

$$L\{f(x)\} = \int_o^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

ويمكن كتابة التكامل على شكل مجموع متكاملات:

$$L\{f(x)\} = \sum_{n=o}^{\infty} \int_{nX}^{(n+1)X} e^{-sx} f(x)dx$$

ويوضع $x = nX + \beta$ تصبح العلاقة السابقة من الصورة :

$$L\{f(x)\} = \sum_{n=o}^{\infty} e^{-nsX} \int_{o}^{X} e^{-s\beta} f(\beta) d\beta$$

ونلاحظ أن التكامل في الطرف الثاني في هذه العبارة لا يتعلق بـــ n وبالتالي يمكـــن جمع المتسلسلة الهندسية على حدة:

$$\sum_{n=o}^{\infty} e^{-nsX} = \sum_{n=o}^{\infty} [e^{-sX}]^n = \frac{1}{1-e^{-SX}}$$

ونكون قد أثبتنا النظرية التالية:-

نظرية -10-

إذا كانت الدالة $f(x)$ من الصنف Δ وكانت $f(x+X) = f(x)$ فإن :

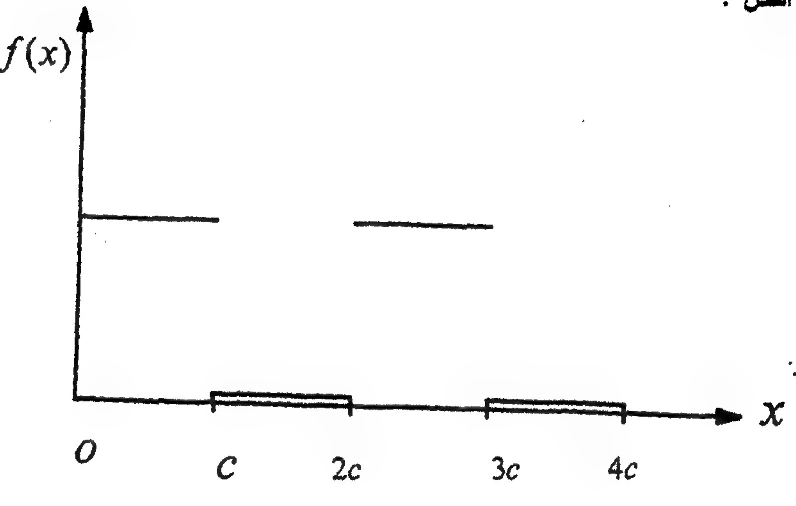
$$L\{f(x)\} = \frac{\int_{O}^{X} e^{-S\beta} f(\beta) d\beta}{1-e^{-SX}} \qquad \textbf{(17)}$$

مثال -12-

جد تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 1 \qquad o < x < c$$
$$f(x) = 0 \qquad o < x < 2c$$
$$f(x+2c) = f(x)$$

الحل :



شكـــل-3-

يعطي تحويل لابلاس لهذه الدالة بالعلاقة (17) أي :

$$L\{f(x)\} = \frac{\int_o^X e^{-S\beta} f(\beta) d\beta}{1 - e^{-SX}}$$

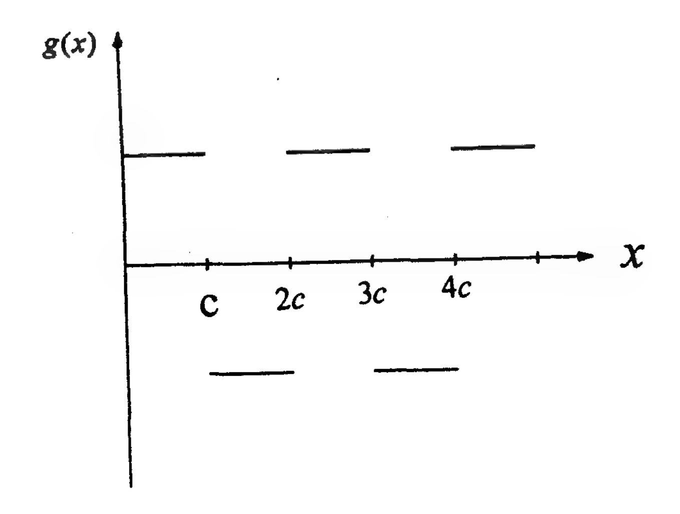
$$L\{f(x)\} = \frac{\int_o^C e^{-S\beta} 1 d\beta}{1 - e^{-2CS}} = \frac{1 - e^{-cs}}{s[1 - e^{-2CS}]}$$

$$L\{f(x)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + e^{-CS}}$$

مثال -13-

جد تحويل لابلاس للدالة $g(x)$ المعرفة كما يلي :

$$g(x)=\begin{cases}1 & o<x<c\\ -1 & c<x<2c\end{cases}$$



شكـــــــــل -4-

نلاحظ أن : $g(x)=2f(x)-1$

حيث $f(x)$ هي الدالة المعرفة في المثال -12-

إذن : $L\{g(x)\}=L\{2f(x)-1\}$

$$=\frac{1}{S}\left[\frac{2}{1+e^{-CS}}-1\right]$$

$$= \frac{1}{S} \cdot \frac{1-e^{-CS}}{1+e^{-CS}}$$

ويمكن كتابة هذه العبارة من الصورة :

$$L\{g(x)\} = \frac{1}{S} \tanh \frac{CS}{2}$$

XII—8 ـ التحويل العكسي The Inverse Transform

نلاحظ من خلال أمثلة الفقرة (5- XII) أن مسألة حل المعادلات التفاضلية تكمن في معرفة الدالة التي يكون تحويلها معروفاً. فالدالة $f(x)$ حيث $L\{f(x)\} = F(s)$ تسمى بتحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ ويمكن أن تكتب:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(x). \qquad \textbf{(18)}$$

حيث L^{-1} هو مؤثر لابلاس العكسي وهو أيضاً مؤثر خطي كما سنرى ذلك فيما بعد. وسنحاول الإجابة على السؤالين التاليين:

1 - كيف يمكن معرفة التحويل العكسي $f(x)$ من خلال معرفة التحويل $F(s)$ ؟

2- هل التحويل العكسي لدالة معطاة F وحيد ؟.

نناقش في البداية السؤال الأول حيث يمكن الحصول على التحويل العكسي بطريقة تحليلية وبواسطة استعمال عبارة التحويل المركب . ويتطلب اشتقاق وتطبيق هذه العبارة معرفة نظريات التحليل الحقيقي المتعلقة بحساب التكاملات المحدودة .

وقد تكون بعض هذه النظريات غير معروفة للقارئ لهذا نلجأ إلى طريقة أخرى يمكن من خلالها معرفة التحويل العكسي :

ليكن : $f(x)$ و $g(x)$ دالتين من الصنف Δ حيث:

$$L\{f(x)\} = F(s) \quad , \quad \Re s > \propto$$
$$L\{g(x)\} = G(s) \quad , \quad \Re s > \beta$$

ولنبحث عن الدالة $h(x)$ التي تحويلها هو عبارة عـــن حـــاصل ضـــرب التحويليـــن $F(s) \quad , \quad G(s)$ أي:

$$L\{h(x)\} = H(s) = F(s).G(s) \quad , \quad \Re s > \sigma \tag{19}$$

حيث $\sigma = \max(\propto, \beta)$

ومنه:

$$L\{h(x)\} = \int_o^\infty e^{-sx} f(x)dx \int_o^\infty e^{-sy} g(y)dy, \qquad \Re s > \sigma$$

والتي يمكن كتابتها من الصورة:

$$L\{h(x)\} = \int_o^\infty \int_o^\infty e^{-s(x+y)} f(x)g(y)dxdy, \qquad \Re s > \sigma$$

أو :

$$L\{h(x)\} = \int_o^\infty g(y)\left[\int_o^\infty e^{-s(x+y)} f(x)dx\right]dy$$

وبوضع $U = x + y$ نجد أن :

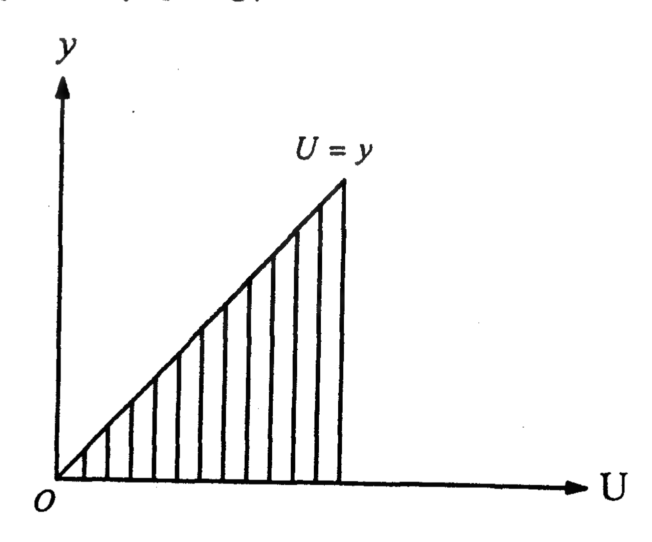
$$L\{h(x)\} = \int_o^\infty g(y)\left[\int_o^\infty e^{-SU} f(U-y)dU\right]dy$$

$$= \int_o^\infty e^{-sU}\left[\int_o^U f(U-y)g(y)dy\right]dU, \qquad \Re s > \sigma \tag{20}$$

حيث تم تغيير تركيب التكاملات مع المحافظة على نفس منطقة التكامل الثنائي:-

في الحالة الأولى:- يتغير y من الصفر إلى ∞ و U من y إلى ∞.

في الحالة الثانية:- يتغير U من الصفر إلى ∞ و y من الصفر إلى U.



شكل - 5-

ونستنتج من العبارة (20) أن :

$$L\{h(x)\} = L\left\{\int_{o}^{x} f(x-y)g(y)dy\right\} \quad \textbf{(21)}$$

وبالتالي نفرض أن :

$$h(x) = \int_{o}^{x} f(x-y)g(y)dy \quad \textbf{(22)}$$

هكذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية -11-

إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ من الصنف Δ ،

$$L\{f(x)\} = F(s) \quad , \quad L\{g(x)\} = G(s)$$

فإن :

$$L\left\{\int_o^x f(x-y)g(y)dy\right\} = F(s).G(s) \qquad (23)$$

ملاحظات:-

1- تسمى الدالة h المعرفة بالعبارة (22) بالتفافية الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ ويرمز لها في بعض الأحيان بالرمز:

$$h = f * g$$

2- إذا كان : $L\{f(x)\} = F(s)$ أو $f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$

فنقول أن $f(x)$ هو تحويل لابلاس العكسي أو اختصارا التحويل العكسي.

3- يمكن كتابة العبارة (23) باستعمال الملاحظة -2- على الصورة التالية :

$$L^{-1}\{F(s).G(s)\} = \int_o^x f(x-y)g(y)dy \qquad (24)$$

4- نذكر فيما يلي بعض خصائص الالتفافية ونترك إثباتها للقارئ :

أ- $f * g = g * f$

ب- $f * (cg) = (cf) * g$

ج- $f * (g * h) = (f * g) * h$

د- $f * (g + h) = f * g + f * h$

هـ- $f * o = o$

مثال -14-

جد تحويل لابلاس العكسي للدالة :

$$\frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s+1}$$

الحـل:

لدينـــا: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-x}$ و $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{x}$

ويكون :
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\}=\int_o^x e^{x-U}e^{-U}\,dU=e^x\int_o^x e^{-2U}\,dU$$

$$=e^x\left[\frac{e^{-2U}}{-2}\right]_o^x=\frac{1}{2}e^x(1-e^{-2x})=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

كما يمكن الحصول على نفس النتيجة باستعمال الطريقة التالية.

نلاحظ أنه يمكن كتابة الحد $\frac{1}{s^2-1}$ من الصورة التالية:

$$\frac{1}{s^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right]$$

وبما أن L^{-1} مؤثر خطي كما سنرى ذلك فيما يلي .

إذن :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\}=\frac{1}{2}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

مثال -15-

جد تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$

الحل:

لقد سبق أن رأينا أن :

$$L\{x\} = \frac{1}{s^2} \quad , \quad L\{\sin x\} = \frac{1}{s^2+1}$$

إذن بناءً على النظرية (11) فإن : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$ هو عبارة عن التفافية الدالتيـــن

: $\sin x \quad , \quad x$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_o^x (x-y)\sin y\, dy = x\int_o^x \sin y\, dy - \int_o^x y\sin y\, dy$$

$$= x - x\cos x + x\cos x - \sin x$$

$$= x - \sin x.$$

كما يمكن أيضاً الحصول على هذه النتيجة بالطريقة التالية:

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

وبما أن L^{-1} مؤثر خطي فإن :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= x - \sin x.$$

ملاحظــة:

سنقدم في أخر الفصل جدولاً لبعض تحويلات لابلاس وذلك للاستعانة بها واســتخدامها للحصول على تحويلات لابلاس العكسية :

نعود الآن إلى السؤال الثاني الذي سبق أن طرحنـــاه والمتعلــق بوحدانيــة التحويــل العكسي، وسنقدم القاعدة الأساسية التالية دون إثبات، ويمكن الحصول على برهانها في كتب الرياضيات المتقدمة.

نظرية -12-

إذا كانت f_2, f_1 دالتين مستمرتين على المجال $o < x < \infty$ ومن الصنف Δ و

$$L\{f_1(x)\} = F_1(s) \qquad , \Re s \geq \sigma$$
$$L[f_2(x)\} = F_2(s) \qquad , \Re s \geq \sigma$$

فإذا كان $F_1(s) = F_2(s)$ من أجل $\Re s \geq \sigma$ فإن $f_1(x) = f_2(x)$ من أجل كل قيم x.

نتيجة:

إحدى نتائج هذه النظرية هي خطية مؤثر تحويل لابلاس العكســـي حيــث إذا كــانت f_2, f_1 دالتين مستمرتين ومن الصنف Δ وكان :

$$L\{f_1(x)\} = F_1(s) \qquad , \Re s \geq \sigma$$
$$L[f_2(x)\} = F_2(s) \qquad , \Re s \geq \sigma$$

فإن التحويل العكسي للدالة $aF_1(s) + bF_2(s)$ هو $af_1(x) + bf_2(x)$ حيــث b, a ثابتان.

ولإثبات هذه النتيجة يكفي ملاحظة أن :

$$L\{af_1(x) + bf_2(x)\} = aF_1(s) + bF_2(s) \qquad (25)$$

وبناءً على النظرية السابقة فإن $af_1(x)+bf_2(x)$ هي الدالة المستمرة الوحيـــدة مـــن الصنف Δ التي تحويلها هو $aF_1(s)+bF_2(s)$ وبالتالي :

$$L^{-1}\{aF_1(s)+bF_2(s)\}=af_1(x)+bf_2(x) \qquad (26)$$

وهذا يعني أن L^{-1} مؤثر خطي.

ملاحظة :

تدخل مسألة تحويل لابلاس العكسي في عدة مسائل رياضية أخـــرى وكأبســـط مثـــال النظرية التالية:

نظرية -13-

إذا كانت f دالة من الصنف Δ و $F(s)$ تحويل لابلاس لهذه الدالة فإن :

$$\lim_{s\to\infty} F(s)=o$$

البرهان:-

بما أن f دالة من الصنف Δ فإنها تحقق المتراجحة التالية :

$$|f(x)|\le Me^{cx}$$

حيث **c** عدد حقيقي

إذن بوضع $\Re s=\sigma$ نجد أن :

$$|F(s)|\le M\int_o^\infty e^{-sx}e^{cx}dx=M\int_o^\infty e^{-\sigma x}e^{-cx}dx=\frac{M}{\sigma-2} \qquad (\Re s>c)$$

وواضح أن :

$$\lim_{\Re s\to\infty}|F(s)|=o \qquad (27)$$

وهـــو المطلـــوب .

وهكذا نكون قد أثبتنا ما يمكن أن نحتاجه، ليس فقط $F(s)$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول S إلى∞ ولكن في الواقع أن $|sF(s)|$ تبقى محدودة عندما $\Re s \to \infty$.

ونكتفي بهذا القدر فيما يخص مناقشة السؤال الثاني المتعلق بوحدانية تحويل لابلاس العكسي، لأننا لا نستطيع أن نقدم كل التفاصيل في هذه الدراسة البسيطة والمختصرة ، ولكن يبقى السؤال مهماً لأن في كثير من الحالات لا يمكن الحصول على التحويل العكسي في صورة صريحة .

تمرين :

أثبت أنه إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ^1 وتحويلها هو $F(s)$ فإن :

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(o) \qquad (28)$$

ثم أثبت أنه يمكن تعميم هذه النتيجة بالنسبة للدوال من الصنف Δ^k .

XII -9- تطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة.

Applications to Linear Equations with Constant Coefficients.

رأينا في الفقرة -5- أن مؤثر لابلاس يحول المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة إلى معادلة جبرية بالنسبة لدالة التحويل ، وقد تناولنا بعض المعادلة من المرتبة الأولى، ويمكن تعميم الفكرة بالنسبة للمعادلات ذات المرتبة العليا، ويمكن الآن دراسة بعض الأمثلة الإضافية بالتفصيل لمعرفة إيجابيات وسلبيات هذه الطريقة.

مثال-16-

جد حل مسألة القيم الحدية التالية باستخدام طريقة التحويل :

$$y'' + \beta^2 y = A\sin\omega t \quad , \qquad y(o) = 1, \quad y'(o) = o$$

حيث ω, β, A ثوابت اختيارية .

الحـــل:-

نضع : $L\{y(x)\}=U(s)$ فيكون لدينا :

$$L\{y'(x)\}=sU(s)-y(o)=sU(s)-1$$

و

$$L\{y''(x)\}=s^2U(s)-sy(o)-s^o y'(o)=s^2U(s)-s$$

بتطبيق المؤثر L على المعادلة قيد الحل نجد أن :

$$s^2U(s)-s+\beta^2U(s)=\frac{A\omega}{(s^2+\omega^2)}$$

ومنه

$$U(s)=\frac{A\omega}{(s^2+\beta^2)(s^2+\omega^2)}+\frac{s}{s^2+\beta^2}$$

ولحساب التحويل العكسي نميز حالتين :

الحالة الأولى : $\omega\neq\beta$ إذن في هذه الحالة يمكن كتابة عبارة $U(s)$ على الصـــورة:

$$U(s)=\frac{s}{s^2+\beta^2}+\frac{A\omega}{\beta^2-\omega^2}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{1}{s^2+\beta^2}\right]$$

$$=\frac{s}{s^2+\beta^2}+\frac{A}{\beta(\beta^2-\omega^2)}\left[\frac{\beta\omega}{s^2+\omega^2}-\frac{\beta\omega}{s^2+\beta^2}\right]$$

وكون $y(x)=L^{-1}\{U(s)\}$ من أجل $\omega\neq\beta$ فإن :

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\beta^2}\right\}+\frac{A\beta}{\beta(\beta^2-\omega^2)}L^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\}-\frac{A\omega}{\beta(\beta^2-\omega^2)}L^{-1}\left\{\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right\}$$

أو

$$y(x)=\cos\beta x+\frac{A}{\beta(\beta^2-\omega^2)}[\beta\sin\omega x-\omega\sin\beta x]$$

الحالة الثانية:

$\omega=\beta$ في هذه الحالة يمكن كتابة عبارة $U(s)$ على الصورة :

$$U(s)=\frac{s}{s^2+\beta^2}+\frac{A\beta}{(s^2+\beta^2)^2}$$

وباستعمال العلاقة :

$$L\{x^k f(x)\}=(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}L\{f(x)\}$$

يكون:

$$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}=L\left\{\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta x-\beta x\cos\beta x)\right\}$$

ومنه :

$$y(x)=\cos\beta x+\frac{A}{2\beta^2}(\sin\beta x-\beta x\cos\beta x)$$

وهذه المسألة بسيطة تبين أن هذه الدالة هي بالفعل الحل لمسألة القيم الحدية المعطاة.

مثال -17-

جد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(x)+2y'(x)+y(x)=3x\,e^{-x}\quad,\quad y(o)=4\quad,\quad y'(o)=2$$

الحل :-

ليكن $L\{y(x)\}=U(s)$ إذن المؤثر L يحول المعادلة قيد الحل إلى معادلة جبرية من الصورة:

$$s^2U(s)-4s-2+2[sU(s)-4]+U(s)=\frac{3}{(s+1)^2}$$

أو

$$U(s)=\frac{4s+10}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$U(s)=\frac{4(s+1)+6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

$$=\frac{4}{s+1}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

وباستخدام التحويل العكسي نجد :

$$y(x)=4e^{-x}+6xe^{-x}+\frac{1}{2}te^{2-x}$$

أو

$$y(x)=(4+6x+\frac{1}{2}x^2)e^{-x}$$

ونرى مرة أخرى أن معرفة الشروط الابتدائية تسهم في فعالية الطريقة المستعملة .

مثال -18-

أوجد حل المعادلة التالية:

$$y''+k^2y=f(x) \quad , \quad y(o)=A, y'(o)=B$$

حيث k, B, A ثوابت معلومة ، $f(x)$ هي دالة معلومة كيفية.

الحل:-

نفرض أن $L\{y(x)\}=U(s)$ و $L\{f(x)\}=F(s)$ وبالتالي فإن مؤثر تحويل لابلاس يحول المعادلة قيد الحل إلى معادلة جبرية من الصورة:

$$s^2U(s)-As-B+k^2U(s)=F(s)$$

ومنه :
$$U(s)=\frac{As+B}{s^2+k^2}+\frac{F(s)}{s^2+k^2}$$

وبأخذ التحويل العكسي لهذه الحدود وباستعمال نظرية الالتفافية نجد أن:

$$y(x)=A\cos kx+\frac{B}{k}\sin kx+\frac{1}{k}\int_o^x f(x-\beta)\sin k\beta d\beta$$

أو:
$$y(x)=A\cos kx+\frac{B}{k}\sin kx+\frac{1}{k}\int_o^x f(\beta)\sin k(x-\beta)d\beta.$$

مثال -19-

جد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(x)+2y'(x)+y(x)=x \quad , \quad y(o)=-3,\ y(1)=-1$$

الحل:

في هذه الحالة الشروط الحدية ليست معطاة عند نفس النقطة .

ليكن :
$$L\{y(x)\}=U(s)$$

ونعلم أن $y(o)=-3$ ولكن نحتاج أيضاً إلى $y'(o)$ من أجل كتابة تحويل y'' ليكـــن إذن $y'(o)=B$ ونأمل تعيين B فيما بعد باستعمال الشرط $y(1)=-1$.

تحويل المعادلة يعطي :

$$s^2U(s)-s(-3)-B+2[sU(s)-(-3)]+U(s)=\frac{1}{s^2}$$

وبالتالي:

$$U(s)=\frac{-3(s+1)+B-3}{(s+1)^2}+\frac{1}{s^2(s+1)^2}$$

وباستعمال الكسور التجزيئية نجد أن:

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2}=-\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

ومنه :

$$U(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{B-2}{(s+1)^2}$$

وباستعمال التحويل العكسي نجد أن:

$$y(x)=x-2-e^{-x}+(B-2)xe^{-x}$$

والآن نفرض أن هذا الحل يحقق الشرط $y(1)=-1$

أي $$-1=1-2-e^{-1}+(B-2)e^{-1}$$

ومنه نجد $B=3$

وتكون النتيجة الأخيرة هي :

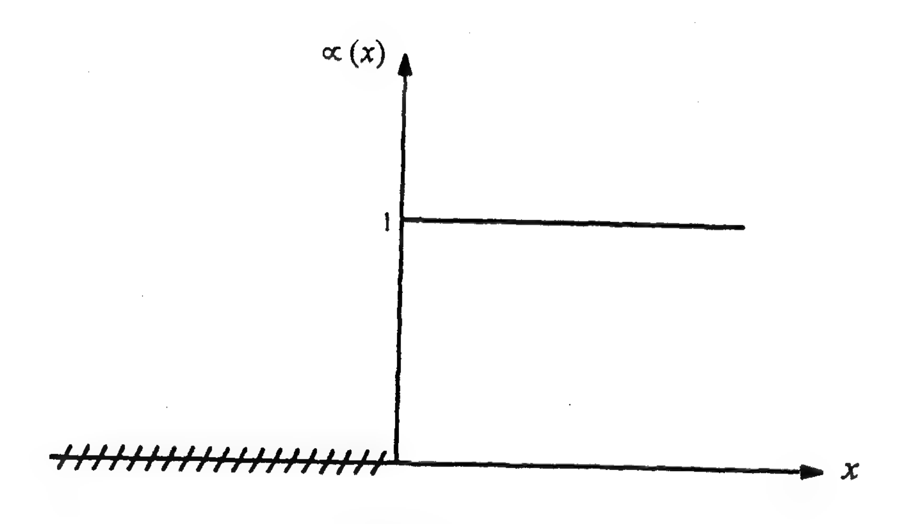
$$y(x)=x-2-e^{-x}+xe^{-x}$$

مثال -20-

نعرف الدالة السلمية $\propto(x)$ بأنها :

$$\propto(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

والتي يكون معطاة من الشكل:



شكـــل – 6–

في هذا التعريف نلاحظ أن الدالة $\propto (x)$ معدومة من أجل طـــور ســـالب وتســـاوي الوحدة من أجل طور موجب أو معدوم. وبالتالي:

$$\begin{aligned} \propto (x-c) &= 0 \qquad x < c \\ &= 1 \qquad x \geq c \end{aligned} \qquad -(29)$$

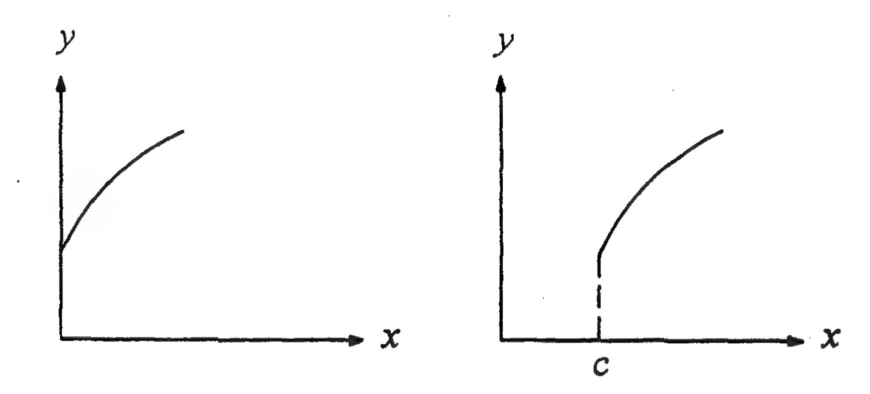
وتمسح الدالة $\propto$ بسهولة بانسحاب منحنى الدالة $f(x)$ إذا كان منحنى الدالة :

$$y = f(x) \qquad x \geq 0$$

المبين في الشكل –1– ومنحنى الدالة

$$y = \propto (x-c) f(x-c) \qquad x \geq c$$

المبين في الشكل –2–



شكــل – 7-

ويتعلق تحويل لابلاس للدالة $\propto (x-c) f(x-c)$ بتحويل الدالة $f(x)$.

لنعتبر التحويل التالي:

$$L\{\propto (x-c) f(x-c)\} = \int_{o}^{\infty} e^{-sx} \propto (x-c) f(x-c) dx$$

وبما أن $\propto (x-c) = o$ من أجل $o \leq x < c$ و $\propto (x-c) = 1$ من أجل $x \geq c$

إذن :
$$L\{\propto (x-c) f(x-c)\} = \int_{c}^{\infty} e^{-sx} f(x-c) dx$$

وبوضع $\vartheta = x - c$ نجد أن:

$$L\{\propto (x-c) f(x-c)\} = \int_{c}^{\infty} e^{-s(c+\vartheta)} f(\vartheta) d\vartheta$$

$$= e^{-cs} \int_{o}^{\infty} e^{-s\vartheta} f(\vartheta) d\vartheta$$

$$= e^{-cs} L\{f(x)\}.$$

$$= e^{-cs} F(s)$$

ونخلص إلى النظرية التالية:

نظرية -14-

إذا كان $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ و $c \geq o$ حيث $f(x)$ معرفة من أجل $-c < x < o$ فإن :

$$L^{-1}\{e^{-cx}F(s)\} = f(x-c) \propto (x-c).$$

مثال -21-

جد حل المعادلة التفاضلية التالية:-

$$y'' + 4y = g(x) \qquad\qquad y(o) = 1, y'(o) = o$$

حيث الدالة $g(x)$ معرفة كما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} 4x & o \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

الحــل:

واضح أن الحل يكون معرفاً من أجل $x \geq 0$ أين تكون الدالة $g(x)$ معرفة.

في هذه المسألة نلاحظ أيضاً صفحة أخرى من قوة طريقة تحويل لابلاس. في الواقـــع أن الدالة $g(x)$ في المعادلة التفاضلية دالة متقطعة:

لهذا نفرض أن : $L\{g(x)\} = U(s)$

ونحتاج إلى حساب $L\{g(x)\}$ بدلالة الدالة السلمية $\propto$.

ويمكن كتابة الدالة $g(x)$ على الصورة :

$$g(x) = 4x - 4(x-1) \propto (x-1) \qquad\qquad , x \geq o$$

وبالتالي :
$$L\{g(x)\} = \frac{4}{s^2} - \frac{4e^{-s}}{s^2}$$

وبنطبق مؤثر تحويل لابلاس على المعادلة قيد الحل نحصل على :

$$s^2U(s) - s - o + 4U(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{4e^{-s}}{s^2}$$

وبالتالي:

$$U(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2(s^2+4)} - \frac{4e^{-s}}{s^2(s^2+4)}$$

وحيث

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}$$

إذن تصبح $U(s)$ من الشكل:

$$U(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4} - (\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4})e^{-s}$$

وبتطبيق التحويل العكسي نجد:

$$y(x) = \cos 2x + x - \frac{1}{2}\sin 2x - \left[(x-1) - \frac{1}{2}\sin 2(x-1)\right] \propto (x-1)$$

ويمكن التحقق من أن هذا الحل هو حل المعادلة قيد الحل ونترك ذلك للطالب.

نقدم هنا جدولاً مختصراً لتحويلات لابلاس. وواضح أن $F(s)$ ترمز لتحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وأن $G(s)$ ترمز لتحويل لابلاس للدالة $g(x)$.

الدالة	التحويل
$e^{\alpha x}$	$\frac{s}{s-\alpha}$
$\cos \beta x$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
$\sin \beta x$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$e^{\alpha x} \cos \beta x$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha x} \sin \beta x$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
x^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$x^k e^{\Im x}$	$\frac{k!}{(s-\Im)^{k+1}}$
$x^k f(x)$	$(-1)^k F^{(k)}(x)$
$x^k \cos \beta x$	$\frac{k!(s+i\beta)^{k+1}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{k+1}}$
$x^k \sin \beta x$	$\frac{k!(s+i\beta)^{k+1}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{k+1}}$
$x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$	$\frac{k![(s-\alpha)+i\beta]^{k+1}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{k+1}}$
$x^k e^{\alpha x} \sin \beta x$	$\frac{k![(s-\alpha)+i\beta]^{k+1}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{k+1}}$

الـــــــــــدالـــــــــــة	التحــــــويـــــــــــل
$f(x-c)\propto(x-c)$	$e^{-cx}F(s)$ $\quad c>o$
$e^{ax}f(x)$	$F(s-a)$
$f'(x)$	$sF(s)-f(o)$
$f^{(k)}(x)$	$s^{k}F(s)-s^{k-1}f(o).........-f^{(k-1)}(o)$
$\int_{o}^{x}f(x-U)g(U)dU$	$F(s).G(s)$
$\int_{o}^{x}f(U)dU$	$F(s)/s$
$\cosh kx$	$s/(s^2-k^2)$
$\sinh kx$	$k/(s^2-k^2)$

تمـــاريـــــن

I- جد تحويل لابلاس للدوال التالية:

1- $\cos kx$, 2- $\sin kh$

3- x^2+4x-5 , 4- x^3-k^2+4x

5- xe^x , 6- $e^{-2x}+4e^{-3x}$

7- $\cosh kx$, 8- $\sinh kx$

9- $\cos^2 kx$, 10- $\sin^2 kx$

11- $\sin \propto x \cos \beta x$, 12- $x^n e^{at} \cos bt$

13- $x^n e^{at} \sin \beta x$

14- $f(x)=\begin{cases} o & o\leq x<1 \\ x & 1\leq x<2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$,15- $f(x)=\begin{cases} 2 & o\leq x<1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

II- بين أن كل من الدوال التالية هي من الصنف Δ.

1- x^n ,(n عدد صحيح) 2- xe^{ax}

3- $x^n e^{ax}$ 4- $x^n e^{ax} \cos bx$

5- $\sqrt{x}$ 6- $\ln(1+x)$

III- أثبت أن : إذا كانت $f(x)$ دالة من الصنف Δ فإن :

$$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a); \quad s > a$$

حيث : $L\{f(x)\} = F(s)$

IV- باستعمال عبارة المسألة III أحسب تحويل لابلاس للدوال التالية:

1- $e^{x} \sin 2x$

2- $e^{-2x} \cos 3x$

3- $e^{-3x} .x^{2}$

4- $e^{4x} x^{4}$

5- $e^{ax} \sinh bx$

6- $e^{ax} \cosh bx$

V- أثبت أنه إذا كان $L\{f(x)\} = F(s)$ حيث $s > o$ فإن :

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}) \qquad , s > o \quad , a > o$$

VI- أثبت أنه : إذا كانت $L\{f(x)\} = F(s)$ فإن :

$$L\{x^{n} f(x)\} = (-1)^{n} \frac{d^{n}}{ds^{n}} F(s)$$

VII- باستعمال عبارة المسألة VI أحسب ما يلي:

1- $L\{x \sin x\}$

2- $L\{x^{2} \cos x\}$

3- $L\{x^{3} e^{2x}\}$

4- $L\{x^{n}\}$

VIII- باستعمال عبارة المسألة IV وعبارة المسألة VI احسب تحويـــل لابـــلاس للدوال التالية :

1- $xe^{-x}\sin 2x$

2- $x^2e^x\cos 3x$

3- $xe^{-x}\frac{d}{dx}(\cos 2x)$

4- $x^2e^xf'(x)$

IX- جد تحويل لابلاس لحل كل من المعادلات التفاضلية التالية:

1- $y''+4y=o$ $\qquad y(o)=o, y'(o)=1$

2- $y''-2y'+y=o$ $\qquad y(o)=1, y'(o)=o$

3- $y''+y=\cos 2x,$ $\qquad y(o)=o, y'(o)=o$

4- $y'''-y=e^{2x}$ $\qquad y(o)=o, y'(o)=2, y''(o)=-1$

5- $y'''+y=xe^x\sin x$ $\qquad y(o)=o, y'(o)=o, y''(o)=1$

X- جد الدالة $f(x)$ المستمرة على المجال $]o,\infty[$ التي تحويلها هو :

1- $\frac{1}{(s-2)^2}$

2- $\frac{3}{s^3}$

3- $\frac{4}{s^2+1}$

4- $\frac{s}{(s^2+g)^2}$

5- $\frac{1}{s(s+3)}$

6- $\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$

XI- اثبت أن التفافية دالتين هو مؤثر تبديلي أي:

$$(f*g)(x)=\int_o^x f(x-y)g(y)dy=\int_o^x f(y)g(x-y)dy=(g*f)(x)$$

XII- باستعمال نظرية الالتفافية . جد الدالة المستمرة على المجال $[o,\infty[$ التـي تحويلها هو :

1- $\dfrac{2}{s(s^2+4)}$

2- $\dfrac{1}{(s-1)(s+s)}$

3- $\dfrac{1}{s^3(s^2-9)}$

4- $\dfrac{s}{(s+3)(s^2+1)}$

5- $\dfrac{2s^2}{(s^2+9)^2}$

6- $\dfrac{s^2+3}{(s-1)^2(s^2+1)^2}$

XIII- احسب مايلي :

1- $e^{2x}*e^{-x}$

2- $e^{ax}*1$

3- $x*e^{ax}$

4- $\sin ax*1$

5- $x*\sin ax$

6- $x*\cos ax$

XIV- إذا كانت f دالــة مســتمرة علــى المجــال $[o,\infty[$ و $F(s)=L\{f(x)\}$ فــأثبــت أن :

1- $L^{-1}\{F(as)\}=\dfrac{1}{a}f(\dfrac{x}{a}) \quad , \quad a>o$

2- $L^{-1}\{F(as+6)\} = \frac{1}{a} f(\frac{x}{a}) e^{-b/_a x}$, $a > o$

XV- باستعمال طريقة تحويل لابلاس . جد حل المعادلات التفاضلية التالية :

1- $y'' + 3y' + 2y = e^x$ $\quad y(o) = 1$, $y'(o) = -2$

2- $y'' + y = e^x \sin x$ $\quad y(o) = o$, $y'(o) = o$

3- $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ $\quad y(o) = 1$, $y'(o) = 1$

4- $y''' - y'' + 4y' - 4y = x^2 e^{3x}$ $\quad y(o) = o$, $y'(o) = 1$, $y''(o) = o$

5- $y''' + 4y' = -3x^4$ $\quad y(o) = 3$, $y'(o) = o$, $y''(o) = o$

6- $y(x) + \int_o^x y(t)dt = \cos x$

7- $y(x) - 2\int_o^x y(t)dt = e^x$

8- $y' + y = \begin{cases} 1 & o \le x < 1 \\ o & x > o \end{cases}$ $\quad y(o) = o$

9- $y'' + y = \begin{cases} o & o \le x < 1 \\ x+3 & x > o \end{cases}$ $\quad y(o) = o$, $y'(o) = o$

10- $y'' + y = \begin{cases} 1 & o \le x < \pi/_2 \\ o & x \ge \pi/_2 \end{cases}$ $\quad y(o) = o$, $y'(o) = 1$

11- $y'' + y = \begin{cases} 4x & o \le x < 1 \\ o & x > 1 \end{cases}$ $\quad y(o) = 1$, $y'(o) = o$

الفصل الثالث عشر

دراسة وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية

Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of the Differential Equations

الفصل الثالث عشر

دراسة وجود وانفراد حلول المعادلات التفاضلية

Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of the Differential Equations

XIII-1- ملاحظـات أوليـه Preliminary Remarks

لقد وضعنا في الفصول السابقة نماذج رياضية لمختلف المسائل الفيزيائية ، وكل هذه النماذج عبارة عن معادلات تفاضلية عادية مع شروط ابتدائية وقد رأينا أن كل نموذج يستخدم كتمثيل نافع لمسألة فيزيائية ، بمعنى أن يكون له حل واحد تام . وسبق أن ذكرنا في الفصول السابقة أيضاً نظريات متعلقة بوجود انفراد حلول المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والثانية ومن المرتبات العليا وسنحاول إثبات هذه النظرية خلال هذا الفصل .

XIII-2- نظرية وجود وانفراد الحل

An Existence and Uniqueness Theorem

سنقدم برهان نظرية وجود وانفراد الحل بالنسبة للمعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى على أنه من الممكن تعميم هذا البرهان بالنسبة للمعادلات ذات المرتبات العليا كما سنوضح ذلك فيما بعد .

لنعتبر المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى التالية :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

ولتكن T منطقة مستطيلة معرفة كما يلي :

$$|x-x_0|\le a \quad و \quad |y-y_0|\le b$$

والنقطة (x_0,y_0) هي مركز المنطقة T.

إذا كانت كل من الدالتين f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرتين عند جميع نقط المنطقة T . فانه يوجد مجال ما : $|x-x_o|\le h$ ودالة $\phi(x)$ لها الخواص التالية :

أ) $y=\phi(x)$ هي حل للمعادلة (1) على المجال $|x-x_o|\le h$

ب) على المجال $|x-x_o|\le h$ ؛ الدالة $\phi(x)$ تحقق المتراجحة :

$$|\phi(x)-y_0|\le b$$

جـ) $\phi(x_0)=y_0$

د) $\phi(x)$ دالة وحيدة على المجال $|x-x_o|\le h$ بمعنى هي الدالة الوحيدة التي لها الخواص أ) ، ب) ، جـ) .

المجال $|x-x_o|\le h$ ليس من الضروري أن يكون أصغر من المجال $|x-x_0|\le a$ حيث تبقى الشروط مفروضة على الدالة f والدالة $\partial f/\partial y$.

وسنقدم برهان هذه النظرية الأساسية في الفقرات التالية . وفي الجوهر يعتمد البرهان على إثبات أن متتالية ما من الدوال لها نهاية وأن الدالة النهائية هي الحل المراد تعيينه.

وفي هذه الحالة يمكن تعريف هذه المتتالية كما يلي :

$$y_o(x)=y_o$$

$$y_1(x)=y_o+\int_{xo}^{x} f(t,y_o(t))dt$$

$$y_2(x) = y_o + \int_{xo}^{x} f(t, y_1(t))dt$$

$$y_n(x) = y_o + \int_{xo}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \qquad (2)$$

وهكذا يمكن أن يظهر البرهان منطقيا ، وسنعطى أولا بعض الأمثلة من المعـــادلات التفاضلية الخاصة قبل البدء في البرهان .

مثال -1-

اثبت أن متتالية الدوال المعرفة بالمعادلات (2) تتقارب الى حل مسألة القيـــم الحدية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = y \quad , \quad x_o = o \quad , \quad y_o = 1$$

الحل :-

$$y_o(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_{o}^{x} dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_{o}^{x} (1 + t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_{o}^{x} (1 + t + \frac{t^2}{2}dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

ومن هذه الصورة المتسلسلة فإنه من الممكن وضع :

$$y_n(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

وهذا من السهل إثباته بالتراجع . علاوة على ذلك فإن نهاية هذه المتتالية موجودة من أجل جميع قيم x الحقيقية لأن النهاية ليست إلا متسلسلة ماكلوران Maclaurin للدالة e^x التي هي متقاربة من أجل جميع قيم x .

أذن :

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

وأنه من السهل التحقق أن e^x هو الحل لمسألة القيم الحدية المعطاة .

<u>مثال -2-</u>

جد حل مسألة القيم الحديثة التالية :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad , \quad x_o = 2 \quad , \quad y_o = 1$$

الحل :-

المتتالية المعرفة في (2) تصبح من الشكل :

$$y_o(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_2^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_2^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

$$y_n(x) = 1 + \int_2^x t^2 dt = x^3/3 - 5/3$$

وواضح أن نهاية هذه المتتالية هي $\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$ وهذه الدالة هي حل مسألة القيم الحديـــة المعطاة .

XIII - 3 شـــرط ليبشيتـــز A lipschitz Condition

لقد اعتبرنا في فرضيات نظرية وجود وانفراد الحل أن الدالـــة f ومشـــقتها $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرتان في المنطقة T . إذن إذا كـــانت (x,y_1) و (x,y_2) نقطتيـــن فـــي T بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة f بالنسبة لـــ y ، فإنه يوجد عـــدد y^* بيـــن y_1 و y_2 حيث :

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*)(y_1-y_2)$$

وبما أن $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرة في المنطقة T فهي محدودة في هذه المنطقة ، أي أنه يوجد عدد k موجب حيث :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le k$$

من أجل كل نقطة في T . وبما أن (x,y^*) نقطة في T فبالتالي :

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}\right|.|y_1-y_2|$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le k|y_1-y_2| \qquad (3)$$

من أجل كل زوج من النقط (x,y_1) و (x,y_2) في المنطقة T .

وتسمى المتراجحة (3) بشرط ليبشيتز للدالة f .

وواضح أن تحت فرضيات نظرية وجود وانفراد الحل ، يظل شرط ليبشيتز عالقاً مــن أجل كل زوجي من النقط (x,y_1) و (x,y_2) في المنطقة T . وسنســتعمل شــرط ليبشيتز في برهان هذه النظرية بدل من فرضية استمرار الدالة $\frac{\partial f}{\partial y}$.

ويمكن إعادة نص هذه النظرية ، بدلالة الشرط (3) بدل من فرضية استمرار الدالــة $\partial f / \partial y$ في المنطقة T .

مثال -3-

إذا كانت $f(x,y) = y^{1/3}$ في المنطقة $T = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$

بين أن هذه الدالة لا تحقق شرط ليبشيتز في هذه المنطقة .

الحــل :-

لإثبات هذا ، يكفي إيجاد زوج من النقط الذي من اجله لا تتحقق المتراجحة (3) مــن أجل أي ثابت موجب k .

لنعتبر النقطتين التاليتين :

$$(x,y_1) \ , \ (x,o) \ : \ -1 \leq x \leq 1 \ , \ y_1 > 0$$

إذن :

$$\frac{f(x,y_1) - f(x,o)}{y_1 - o} = \frac{y_1^{1/3} - o}{y_1} = y_1^{-2/3}$$

وإذا اخترنا y_1 أصغر ما يمكن فواضح أن $k = y_1^{-2/3}$ يصبح أكبر ما يمكن إذن فالمتراجحه (3) لا تتحقق من أجل أي ثابت موجب k .

XIII -4. برهــان نظريــة وجــود الحــل
A proof of the Existence Theorem.

إحدى فرضيات نظرية وجود وانفراد الحل هي أن الدالة f دالة مستمرة في المنطقة T وبالتالي فالدالة f محدودة في المنطقة T .

أي :

$$\forall (x,y)\in T \quad , \quad \exists \mathrm{M}>0 \quad : \quad |f(x,y)|\le M$$

وليكن العدد h حيث : $h=\min(a,\dfrac{b}{M})$

وبالتالي يمكن تعريف المنطقة الجزئية R بما يلي :

$$R=\{(x,y)\in R : |x-xo|\le h \quad , \quad |y-y_o|\le b\}$$

ونعتبر الآن متتالية الدوال التالية :

$$y_o(x)=y_o$$

$$y_n(x)=y_o+\int_{xo}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt \quad , \quad \mathrm{n}\ge 1 \qquad (4)$$

وقبل البدء في البرهان نثبت أولاً التمهيديات التالية :

تمهيدية -1- **Lemma -1-**

من أجل $|x-x_o|\le h$ فأن :

$$|y_n(x)-y_o|\le b \quad : \quad n=1,2,3,...$$

البرهان :

سنثبت هذه التمهيدية بالبرهان بالتراجع .

أولاً : إذا كان $|x - x_o| \le h$ و $n = 1$ فأنه :

$$|y_1(x) - y_o| = \left|\int_{x_o}^{x} f(t, y_o)dt\right|$$

$$\le M\left|\int_{x_o}^{x} dt\right| = M|x - x_o| \le Mh \le b$$

لنفرض أن المتراجحة متحققة من أجل $n = k$ أي :

$$|y_k(x) - y_o| \le b \quad \text{من أجل} \quad |x - x_o| \le h$$

وهذا يعني أن النقطة $(x, y_k(x))$ هي نقطة من المنطقة T أي :

$$|f(x, y_k(x))| \le M$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$|y_{k+1}(x) - y_o| = \left|\int_{x_o}^{x} f(t, y_k(t))dt\right|$$

$$\le M\left|\int_{x_o}^{x} dt\right|$$

$$\le M|x - x_o| \le Mb \le b$$

وهو المطلوب .

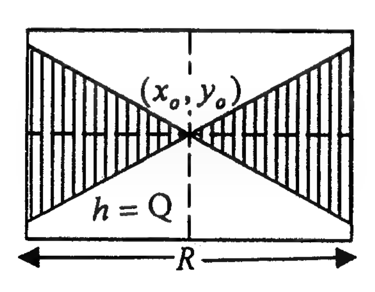
ويمكن أن تصاغ هذه التمهيدية بشكل أبسط :

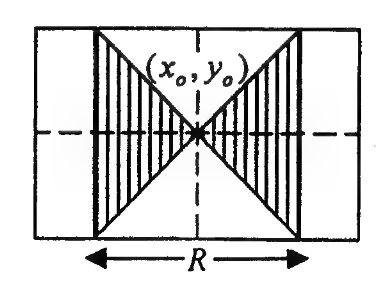
إذا كان $|x - x_o| \le h$ فإن مجموعة النقط $(x, y_k(x))$ حيث $n = 0,1,2,....$ هي نقطة من المنطقة T.

ملاحظـــة :

يوضح الشكلان التاليان المنطقة T في حالة اختيار الثابت h حيث :

$$h=\min(a,\frac{b}{m})$$





Lemma –2- **تمهيدية –2-**

إذا كان $|x-x_o|\le h$ فان :

$$|f(x,y_n(x))-f(x,y_{n-1}(x))|\le K|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \ , \quad n=1,2,3,...$$

وتمثل هذه التمهيدية شرط ليبشيتر ونترك إثباتها للقارئ .

Lemma -3- **تمهيدية -3-**

إذا كان $|x-x_o|\le h$ فأن :

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{MK^{n-1}}{n!}|x-x_o|^n\le\frac{MK^{n-1}h^n}{n!} : n=1,2,...$$

البرهـــان :

في الحالة $n=1$ يكون لدينا من برهان القضية – 1- :

$$|y_1(x)-y_o|\le M(x-x_o)$$

لنفرض أن المتراجحة متحققة من أجل $n-1$ أي :

$$|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|\le \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}|x-x_o|^{n-1} \qquad (5)$$

ولنثبت الآن أن :

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le \frac{MK^{n-1}}{n!}|x-x_o|^{n}$$

لنعتبر الحالة $x_o\le x\le x_o+h$ فيكون لدينا من التمهيدية -2-:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|=\left|\int_{x_o}^{x}[f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y_{n-2}(t))]dt\right|$$

$$\le \int_{x_o}^{x}|f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y_{n-2}(t))|dt$$

أو

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le K\int_{x_o}^{x}|y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)|dt$$

وباستعمال الفرضية (5) نستنتج أن :

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le K\frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}\int_{x_o}^{x}(t-x_o)^{n-1}dt \qquad (6)$$

أو $\quad |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{MK^{n-1}}{n!}|x - x_o|^n \quad , \quad x_o \le x \le x_o + h$

في الحالة $x_o - h \le x < x_o$ نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على نفس النتيجة وهكذا يكتمل برهان التمهيدية -3-

ونعود الآن إلى إثبات نظرية وجود الحل للمعادلة التفاضلية .

البرهان :

من التمهيدية -3- يمكننا مقارنة المتسلسلتين التاليتين :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[y_n(x) - y_{n-1}(x)] \qquad (7,a)$$

و

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{MK^{n-1}h^n}{n!} \qquad (7,\text{b})$$

وواضح أن المتسلسلة (b) متقاربة لأن :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{MK^{n-1}h^n}{n!} = \frac{\text{M}}{\text{K}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Kh)^n}{n!} = \frac{M}{K}(e^{Kh} - 1)$$

وبما أن : $\quad |U(x)| \ge |s(x)|$

ومن اختبار المقارنة اختبار (Weierstrass) فإن المتسلسلة $S(x)$ متقاربة مطلقاً وبانتظام على المجال $|x - x_o| \le h$.

إذا أخذنا المجموع الجزئي حتى الحد ℓ للمتسلسلة $(7,a)$ نجد أن :

$$\sum_{n=1}[y_n(x) - y_{n-1}(x)] = [y_1(x) - y_o(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \ldots$$

$$+ \left[y_{\ell-1}(x) - y_{\ell-2}(x)\right] + \left[y_{\ell}(x) - y_{\ell-1}(x)\right]$$

ومنه يكون :
$$y_k(x) = y_o(x) + \sum_{n=1}^{\ell}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x)\right]$$

وهذه الصورة تبين أيضاً أن المتتالية $\{y_n(x)\}$ متقاربة على المجـــال $|x - x_o| \le h$ وتؤول إلى دالة ما في المتغير x ولتكن $\phi(x)$ أي أن :

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

ويبقى الآن أن نثبت أن هذه الدالة $\phi(x)$ مستمرة وتحقق المعادلة التفاضلية .

لدينا من تعريف الدالة $\phi(x)$:

$$\phi(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x)\right]$$

أو أيضاً :

$$\phi(x) - y_\ell(x) = \sum_{n=\ell+1}^{\infty}\left[y_n(x) - y_{n-1}(x)\right]$$

وباستعمال التمهيدية -3- نجد أن :

$$\left|\phi(x) - y_\ell(x)\right| \le \sum_{n=\ell+1}^{\infty}\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right|$$

$$\le \frac{M}{K}\sum_{n=\ell+1}^{\infty}\frac{(Kh)^n}{n!}$$

$$\le \frac{M}{K}\cdot\frac{(Kh)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(Kh)^n}{n!}$$

$$(8) \qquad \leq \frac{M}{K} \cdot \frac{(Kh)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} e^{Kh} \quad , \qquad |x - x_o| < h$$

وهذا الحد يؤول إلى الصفر عندما $\ell \to \infty$ من اجل $|x - x_o| \leq h$ ويعني هذا أن :

$$\lim \int_{x_o}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt = \int_{x_o}^{x} f(t, \phi(t))dt$$

وتكون $\phi(x)$ هي حل المعادلة التكاملية التالية :-

$$\phi(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f\big(t, \phi(t)\big)dt$$

ولاستكمال برهان نظرية Picard يجب أن نبين أخيراً أن $y(x)$ هي حل وحيد لمسألة القيم الابتدائية المعطاة على المجال $[x_o - a \ , \ x_o + a]$.

لهذا نعتبر $\phi(x)$ حلاً للمعادلة :

$$y' = f(x, y)$$

على المجال $|x - x_o| < a$

بحيث $\phi(x_o) = y_o$

إذن استمرارية الدالتين $\phi(x)$ تستوجب أن يكون مجالاً حول النقطة x_o ، ليكن $|x - x_o| < \delta$ هذا المجال والذي بداخله يكون $|\phi(x) - y_o| < b$. إذا كان الفرق بين $\phi(x)$ و y_o يكون دوماً مساوياً b ، فليكن x_1 قيمة لـ x قريبه من x_o والتي يكون من اجلها يكون هذا صحيحاً .

إذن $|\phi(x_1) - y_o| = b$ و $|\phi(x) - y_o| < b \ \text{ for } \ |x - x_o| < |x_1 - x_o|$

إذن :

$$\left|\frac{\phi(x_1)-y_o}{x_1-x_o}\right| = \frac{b}{|x_1-x_o|} = \frac{b}{h}\cdot\frac{h}{|x_1-x_o|} \geq M\frac{h}{|x_1-x_o|} \qquad (9-a)$$

ومع ذلك ، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة . فأنه توجد قيمة $x=\xi$ بين x_o و x_1 بحيث :

$$\left|\frac{\phi(x_1)-y_o}{x_1-x_o}\right| = \left|\frac{\phi(x_1)-\phi(x_o)}{x_1-x_o}\right| = |\phi'(\xi)| = |f(\xi,\phi(\xi))| \leq M \qquad (9-b)$$

من هنا يكون لدينا تناقض مع (g_a) ما لم يكون $|x_1-x_o| \geq h$.

بمعنى أخر ، لكل حل $\phi(x)$ لمسألة القيم الابتدائية ، فأن المتراجحـــة $|\phi(x)-y_o| < b$ تبقى ثابتة من اجل جميع قيم x_o في المجال $|x-x_o| < a$ بشكل شامل .

من العلاقتين :

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t,y(t))dt$$

$$\phi(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(t,\phi(t))dt$$

والتي تبقى متماسكة من اجل حلين لمسألة القيمة الابتدائية ، فيكون لدينا مـــن طـــرح المعادلتين واخذ القيمة المطلقة :

$$|y(x)-\phi(x)| \leq \left|\int_{x_o}^{x} f(t,y(t)) - f(t,\phi(t))dt\right|$$

إضافة إلى ذلك ، بما أن $|\phi(x)-y_o| \leq b$ من لجل قيمة x في المجال $|x-x_o| < a$ فأن $f(t,y(t))$ و $f(t,\phi(t))$ لهما قيم عند نقط من T .

وبالتالي فأن شرط ليبشيتز محقق ، وفي المتراجحه الأخيرة يكون لدينا :

$$|y(x)-\phi(x)| \leq \left| \int_{x_o}^{x} A|y(t)-\phi(t)|dt \right| \qquad (10)$$

زيادة على ذلك ، بما أن الفرق الأكبر بين $y(t)$ و $\phi(t)$ هو 2 b فيكون :

$$|y(x)-\phi(x)| \leq \left| \int_{x_o}^{x} A2bdt \right| = 2bA|x-x_o|$$

فإذا عدنا إلى المتراجحه (10) السابقة واستعملنا التقدير لـ $|y(t)-\phi(t)|$ في الحد المكمل نجد التقدير المحس :

$$|y(x)-\phi(x)| \leq \left| \int_{x_o}^{x} A(2bA|t-x_o|)dt \right| = 2bA^2 \frac{|x-x_o|^2}{2}$$

فإذا عدنا إلى المتراجحه (2) بهذا التقدير الجديد فإننا نحصل على :

$$|y(x)-\phi(x)| \leq \left| \int_{x_o}^{x} A\left(2bA^2 \frac{|t-x_o|^2}{2}\right)dt \right| = 2bA^3 \frac{|x-x_o|^3}{3!}$$

بالاستمرار في هذا الإجراء في تنقية التقدير لـ $|y(x)-\phi(x)|$ نحصل بعد الخطوة n على :

$$|y(x)-\phi(x)| \leq 2bA^n \frac{|x-x_o|^n}{n!} \leq 2b \frac{A^n a^n}{n!}$$

ونلاحظ أن الحد الآتي لهذه المتراجحه المستمرة هو من الرتبة (n+1) لمتسلسلة القوة المتقاربة $2be^{Aa}$ والذي يقترب من الصفر عندما يصبح n لانهائيا .

وبالتالي فأن الفرق $|y(x)-\phi(x)|$ يمكن أن يأخذ اختيارياً صغير بأخذ n اكـبر مـا يمكن وبالتالي يكون الفرق معدوماً ومنه :

يكون على المجال $|x-x_o| \le a$: $y(x)=\phi(x)$

وهكذا يكمل برهان نظرية Picard والتي يمكن إعادة صياغتها في الشكل التالي :

نظريـة (Picard):

تعتبر المعادلة التفاضلية : $y' = f(x,y)$

والشـرط الابتـدائـي : $y(x_o) = y_o$

حيث $f(x,y)$ دالة مستمرة في منطقة مستطيلة T :

$$|y-y_o| \le b \quad , \quad |x-x_o| \le a$$

وتحقق شرط ليبشيتز : $|f(x,y_i)-f(x,y_j)| \le A|y_i-y_j|$ في T .

إذا كان $|f(x,y)| \le M$ في T وإذا كان h اصغر العددين $\left(a, \frac{b}{M}\right)$ فأنه يوجد حـل وحيد لمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = f(x,y) \quad \text{و} \quad y(x_o) = y_o$$

على المجال $|x-x_o| < h$.

ملاحظـة :

يمكن تعميم نظرية Picard لتشمل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبـة الثانية والتي تأخذ الشكل :

$$y'' = f(x,y',y) \qquad (11)$$

والتي يرفق معها الشروط الابتدائية التالية :

$$y(x_o) = y_o \quad \text{و} \quad y'(x_o) = y'_o$$

على المجال : $|x - x_o| < a$.

ويكـــون نصهـــا كما يلـــي :-

<u>نظرية -2-</u>

إذا كانت الدالة $f(x, y, y')$ في المعادلة (11) ومشتقاتها الجزئية بالنسبة إلـــى y', y مستمرة في المنطقة T . المعرفة كما يلي :

$$|x - x_o| \le a \quad , \quad |y - y_o| \le b \quad , \quad |y' - y'_o| \le c \tag{12}$$

فأنه يوجد مجال ما : $|x - x_o| \le h$ ، وحل وحيد $\phi(x)$ للمعادلـــة التفاضليـــة (11) على المجال $|x - x_o| \le h$ ، ويحقق الشروط الابتدائية التالية :

$$\phi'(x_o) = y'_o \quad , \quad \phi(x_o) = y_o \tag{13}$$

<u>ملاحظـــات:</u>

1- يمكن أتباع خطوات البرهان السابق لإثبات هذه النظرية ، كما يمكن الحصـــــول عليه في عدة مراجع أخرى* ونترك إثبات هذه النظرية للقارئ .

2- يمكن أن يتم تعميم هذه النظرية على المعادلات التفاضلية مـــن المرتبـــة العليـــا مباشرة .

E.L.Ince : "Ordinary Differential Equations" London Longmans, Green and CO - *1927

تمـــاريـــــن

1- حل كلاً من المعادلات التالية بطريقة التقريبات المتعاقبة :

1- $y' = y \quad , \quad y = y_o = 1 \quad , \quad x = o$

2- $y' = y^2 \quad , \quad y = y_o \quad , \quad x = o$

3- $y' = 2xy \quad , \quad y = y_o = 1 \quad , \quad x = o$

4- $y' = y + e^x \quad , \quad y = y_o \quad , \quad x = o$

2- اثبت التمهيدية التالية :

إذا كان $|y_n(x) - y_o| \le b$ و $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$

فأن $|y(x) - y_o| \le b$

3- في هذه المسألة سنهتم بسؤال انفراد الحل للمعادلة التكاملية :

$$\phi(x) = \int_o^x f[t, \phi(t)]dt$$

أ- افرض أن ϕ و Ψ حلان للمعادلة التكاملية .

اثبت أن :

$$\phi(x) - \Psi(x) = \int_o^x \{f[t, \phi(t)] - f[t, \Psi(t)]\}dt$$

ب- بيّن أن :

$$|\phi(x)-\Psi(x)| \leq \int_{o}^{x} |f[t,\phi(t)]-f[t,\Psi(t)]| dt$$

ج- باستعمال شرط ليبشيتز بيّن أن :

$$|\phi(x)-\Psi(x)| \leq K \int_{o}^{x} |\phi(t)-\Psi(t)| dt$$

حيث K الحد الأعلى لـــ $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ في المنطقة T .

الفصل الرابع عشر

النظم الخطية للمعادلات التفاضلية

Linear systems of Differential Equations

الفصل الرابع عشر

النظم الخطية للمعادلات التفاضلية

Linear systems of Differential Equations

XIV -1- مقدمة :- Introduction

نصادف في جميع فروع الرياضيات البحتة والتطبيقية والفيزياء مجموعة معادلات تفاضلية لعدة متغيرات تابعة لمتغير مستقل واحد . كما يمكن تحويل كل معادلة تفاضلية إلي مجموعة معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى كما سنرى نهاية هذا الفصل وتدعى مجموعة المعادلات بنظم المعادلات .

سنقتصر في هذا الفصل على دراسة النظم الخطية للمعادلات التفاضلية والتي ترتكز أساساً على معرفة بعض مفاهيم الجبر الخطي كالفراغ الاتجاهي وجبر المصفوفات ... الخ .. وكل النظم يمكن اختزالها في معظم الأحيان إلى نظم خطية للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى بالاستعانة ببعض الفرضيات البسيطة وسنقتصر على دراسة هذا النوع من النظم وبطبيعة الحال يكمن الحصول على النتائج المقابلة بالنسبة للنظم الخطية للمعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية أو من المراتب العالية كما رأينا في الفصول السابقة .

لنعتبر نظام المعادلات التفاضلية الخطية ذات المرتبة الأولي من الشكل التالي :-

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots\dots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots\dots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots\dots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x)
\end{aligned} \qquad (1)
$$

حيث الـــدوال المعطاة : $a_{ij}(x)$, $g_i(x)$: $i=1,...,n$ هي دوال مســـتمرة علـــى مجال ما I .

ونلاحظ أن النظام (1) خطي بالنســـبة للـــدوال $y_1, y_2,..., y_n$ والـــدوال المشـــتقات $y'_1, y'_2,....., y'_n$ وإذا كانت الدوال $\{g_1(x)\}$ مطابقة للصفر فالنظام يســـمى نظامـــا متجانسا وإذا كانت غير معدومة على المجال I فالنظام يصبح نظاما غير متجانس .

مثال -1-

نعتبر النظام التالي :-

$$y'_1 = y_1 - xy_2 + e^x$$

$$y'_2 = x^2 y_1 - y_3$$

$$y'_3 = y_1 + y_2 - y_3 + 2e^{-x} \qquad (i)$$

حيث المجال I هو المحور الحقيقي = $]-\infty,+\infty[$ وفي هذه الحالة $n=3$ وباســـتعمال رموز العبارة I نجد أن :-

$$a_{11}(x)=1 \quad a_{12}(x)=-x \quad a_{13}(x)=0 \quad g_1(x)=e^x$$

$$a_{21}(x)=x^2 \quad a_{22}(x)=0 \quad \alpha_{23}(x)=-1 \quad g_2(x)=0$$

$$a_{31}(x)=1 \quad a_{32}(x)=1 \quad a_{33}(x)=-1 \quad g_3(x)=2e^{-x}$$

لنأخذ النظام التالي :-

$$A(x)=\begin{bmatrix}1 & -x & 0\\ x^2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

$A(x)$ هي مصفوفة حيث عناصرها دوال تبقي جميع خـواص المصفوفـات (جمـع المصفوفات – ضرب المصفوفات بثابت ... الخ) سارية المفعول بالنسبة للمصفوفات التي عناصرها دوال معرفة على المجال المشترك I .

ليكن y', y متجهين عمودين :-

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} \quad , \quad y'=\begin{bmatrix}y'_1\\ y'_2\\ y'_3\end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

وليكن $g(x)$ متجه معرف كما يلي :-

$$g(x)=\begin{bmatrix}e^x\\ 0\\ 2e^{-x}\end{bmatrix} \qquad \text{(iv)}$$

إذن نلاحظ أن الضرب ألا تجاهي المصفوفي لـــ $A(x)$, y يعطي :-

$$A(x)y=\begin{bmatrix}y_1-xy_2\\ x^2y_1-y_3\\ y_1+y_2+y_3\end{bmatrix}$$

ونرى أن النظام السابق يمكن تمثيله على الصورة المصفوفية الاتجاهيه

$$y'=A(x)y+g(x) \qquad \text{(v)}$$

حيث $g(x), A(x)$ معرفتان في (ii) بالترتيب

نعود الآن إلى الحالة العامة للنظام (1) ونعرف المصفوفة كما يلي :-

$$A(x)=\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x)......a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x).......a_{2n}(x) \\ .... \\ .... \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x)........a_{nn}(x) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

حيث العناصر هي الدوال $a_{ij}(x)$ وعددها n^2 حيث $i,j=1,........,n$ وتعرف المتجهات $y',y,g(x)$ كما يلي :-

$$g(x)=\begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} \quad , \quad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad , \quad y'=\begin{bmatrix} y' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} \qquad (3)$$

إذن النظام (1) يمكن كتابته على الصورة :

$$y'=A(x).y+g(x) \qquad (4)$$

تمرين -1-

ليكن لدينا النظام

$$y_1' = y_2 + \sin x$$
$$y_2' = y_1$$

عرف المصفوفة $A(x)$ والمتجهات $g(x),y',y$ ثم اكتب هذه النظام من الصورة (4) قبل البدء في تعريف الحل ومناقشة النظام (4) يجب أن نقدم بعض التعاريف الجبرية المتعلقة بالمصفوفات والمتجهات .

2. تعاريف Definitions

1- نقول أن المصفوفة $A(x)$ (أو المتجه $g(x)$) مستمرة (أو مستمر) على المجال I إذا وإذا فقط كان كل عنصر من عناصرها دالة مستمرة عند كل نقطة من المجال I .

2- المصفوفة $B(x)(nxn)$ أو المتجه $U(x)$ ذو n مركبة والمعرفتان على المجال I والمعطاة على الصورة التالية :-

$$B(x)=\begin{bmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & b_{13}(x) \ldots\ldots b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & b_{23}(x) \ldots\ldots b_{2n}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & b_{n3}(x) \ldots\ldots b_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad , \quad U(x)=\begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \\ \vdots \\ U_n(x) \end{bmatrix}$$

قابلتان للاشتقاق على المجال I إذا و إذا فقط كان كل عنصرهما قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة من المجال I . وتكون المشتقة الأولى من الصورة :-

$$B'(x)=\begin{bmatrix} b'_{11}(x) & b'_{12}(x) \ldots\ldots b'_{1n}(x) \\ b''_{21}(x) & b'_{22}(x) \ldots\ldots b'_{2n}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b'_{n1}(x) & b'_{n2}(x) \ldots\ldots b'_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad , U'(x)=\begin{bmatrix} U'_1(x) \\ U'_2(x) \\ \vdots \\ U'_n(x) \end{bmatrix}$$

بالمثل نقول أن المصفوفة $B(x)$ أو المتجه $U(x)$ قابلان للتكامل على المجال (C,d) إذا وإذا فقط كان كل عنصر من عناصرهما قابلان للتكامل على المجال (C,d) ويكون تكاملهما من الصورة :-

$$\int_C^d B(x)dx = \begin{bmatrix} \int_C^d b_{11}(x)dx & \int_C^d b_{12}(x)dx \cdots\cdots & \int_C^d b_{1n}(x)dx \\ \int_C^d b_{21}(x)dx & \int_C^d b_{22}(x)dx \cdots\cdots & \int_C^d b_{2n}(x)dx \\ \vdots & \vdots \quad \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \int_C^d b_{n1}(x)dx & \int_C^d b_{n2}(x)dx \cdots\cdots & \int_C^d b_{nn}(x)dx \end{bmatrix}$$

$$\int_C^d U(x)dx = \begin{bmatrix} \int_C^d U_1(x)dx \\ \int_C^d U_2(x)dx \\ \vdots \\ \int_C^d U_n(x)dx \end{bmatrix}$$

3-لتكن $A(x)$ مصفوفة $n \times n$ مستمرة على المجال I ليكن $g(x)$ مستمراً ذا n مركبة على المجال I . حل النظام :

$$y'(x) = A(x)y(x) + g(x)$$

على مجال ما J هو $(J \subset I)$ هو متجه $U(x)$ مشتقته $U'(x)$ مستمرة على المجال J حيث أن :

$$U'(x) = A(x)U(x) + g(x)$$

من اجل قيم x في المجال J .

مثال -2-

لنعتبر المعادلة التفاضلية (حالة $n=1$) $y' = y+1$

إذن $U(x)=e^{-x}+1$ هو الحل علي المجال $-\infty < x < \infty$

بالنسبة إلى $U'(x)$ فهي مستمرة على المجال $-\infty < x < \infty$ ولدينا $U'(x)=e^{-x}$

وهكذا يكون

$$U'(x) = -U(x)+1$$

مثال -3-

بين أن $U(x)=\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$ هو حل للنظام (4) على المجال $-\infty < x < \infty$

حيث $n=2$ و

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad g(x)=0$$

الحل :-

واضح أن $U(x)$ قابل للاشتقاق على المجال $-\infty < x < \infty$ لان e^x دالة مستمرة

و

$$U'(x)=\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

من جهة أخرى $A(x)U(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^x \\ e^x \end{bmatrix}$ حيث

$-\infty < x < \infty$

وهكذا يكون $-\infty<x<\infty$ $U'(x)=A(x)U(x)$

4- ليكن $U(x)$ حلا لمسالة القيم الابتدائية التالية :-

$$y' = A(x)y + g(x) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

حيث $y_0, x_0 \in I$ متجه من الفضاء الاقليدي .

إذن $U'(x) = A(x)U(x) + g(x)$ من اجل كل قيم x في المجال I

حيث

$$U(x_0) = y_0 \quad , \quad x_0 \in I$$

مثال -4-

بين أن المتجه $U(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix}$

هو حل للنظام $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$ حيث $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

على المجال $-\infty < x < \infty$ والذي يحقق الشرط الابتدائي $U(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

الحـــل :-

واضح أن :- $U(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

وبما أن مشتقات $\cos x$ و $\sin x$ دوال مستمرة على المجال $-\infty < x < \infty$

فان :-

$$U'(x) = \begin{bmatrix} -\sin x \\ -\cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2(x) \\ -U_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} U(x)$$

مثال -5-

بين أن المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التالية :

$$y'' + \rho(x)y' + q(x)y = r(x) \quad , \quad y(x_0) = a \quad , \quad y'(x_0) = b$$

حيث r, q, ρ دوال مستمرة على المجال x_0, I نقطة من المجال I و b, a ثابتان يمكن اختزالها إلى صورة النظام (6)

الحــل :-

تكمن الفكرة الأساسية في إدخال دالتين y_2, y_1 حيث

$$y_1 = y \qquad , \qquad y_2 = y'$$

إذن

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y'' = -\rho(x)y' - q(x)y + r(x) = -\rho(x)y_2 - q(x)y_1 + r(x)$$

هذا يعني انه يمكن تمثيل مسالة القيم الحدية المعطاة من صورة النظام (6) أي :-

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -\rho(x) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix} \quad , \; y(x_0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

حيث

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن هذا النظام هو حالة خاصة من النظام (6)

مثال -6-

بصفة عامة أن المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n التالية :

$$y^{(n)} + P_1(n)y^{(n-1)} + ... + P_{n-1}(x)y' + P_n y = r(x)$$
$$y(x_0) = a_1, y'(x_0) = a_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = a_n$$

حيث $P_1, P_2, ...P_n$ دوال مستمرة معطاة على المجال x_0, I نقطة من I و $a_1, a_2, ...a_n$ ثوابت اختيارية .

تكافئ النظام التالي :-

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -P_n(x) & -P_{n-1}(x) & \cdot & -P_2(x) & -P_1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$$

و

$$y(x_0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

حيث

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad , \; y' = \begin{bmatrix} y' \\ y_2' \\ \vdots \\ y' \end{bmatrix}$$

بوضع $y_1 = y_1, y_2 = y', y_3 = y''', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$

يكون لدينا :-

$$
\begin{aligned}
&y_1' = y' = y_2 \\
&y_2' = y'' = y_3 \\
&\vdots \\
&y_{n-1}' = y^{(n-1)} y_n \\
&y_n' = y^{(n)} = -P_n(x)y_1 - P_{n-1}(x)y_2 - \ldots\ldots\ldots - P_1(n)y_n + r(x)
\end{aligned}
$$

$$y_1(x_0) = y(x_0) = a_1, y_2(x_0) = y'(x_0) = a_2, \ldots\ldots\ldots, y_n(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = a_n$$

هذا يؤدي أن مسالة القيم الابتدائية مكافئة للنظام

$$
y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ -P_n(x)y_1 - P_{n-1}(x)y_2 . - \ldots\ldots\ldots - P_1(x)y_n . + r(x) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 \\ -\mathrm{P}_n(x) & & \cdots - \mathrm{P}_2(x) - P_1(x) & \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(x) \end{bmatrix}
$$

حيث
$$y(x_0)=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

3.XIV نظريـــة وجـــود وانفـــراد الحـــل
The Existence and Uniqueness Theorem

نظرية -1-

إذا كانت $A(x)$ مضمونة $(n\times n)$ مستمرة على مجال مـــا I و $g(x)$ متجـــه ذا n مركبة مستمر على نفس المجال I . إذن من اجل كل نقطة x_0 من I ومن اجل متجـــه ثابت $y(x_0)$ فان لمسالة القيم الابتدائية التالية

$$y'=A(x)y+g(x) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \qquad (7)$$

حل واحد وواحد فقط على المجال I

البرهان :-

كما مر معنا في الفصل السابق في دراسة نظرية وجـــود وانفـــراد حـــل المعـــادلات التفاضلية ، يمكننا إثبات نفس النظرية بالنسبة للنظم المعادلات التفاضلية حيث تكـــافئ مسالة القيم الابتدائية (7) المعادلة التكاملية التالية :-

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[A(s)y(s)+g(s)]ds \qquad (8)$$

ليكن J مجالا جزئيا منتهيا مغلقا من I يحتوي على النقطة x_0 (إذا كـــان I مغلقــا نأخذ $I = J$) ويمكن أن نتبع نفس خطوات برهان نظرية وجود وانفراد حل المعادلـــة التفاضلية من المرتبة الأولى .

نبدأ أولا بتعريف متتالية المتجهات من الصورة التالية :-

$$\Phi_0(x)=y_0$$
$$\Phi_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\left[A(s)\Phi_n(s)+g(s)\right]ds, n=1,2,........ \quad (9)$$

ثم نثبت بالتراجع أن المتجه $\Phi_n(x)$ معرف ومستمر على المجال J

واضح أن $\Phi_0(x)$ هو متجه دوال معرفة ومستمرة على المجال J

نفرض أن $\Phi_n(x)$ هو متجه دوال معرفة ومستمرة على المجال J

إذن $A(s)\Phi_n(s)+g(s)$ هو متجه دوال مستمرة على المجال J . وتكاملـــها من x_0 إلى x هو متجه دوال مستمرة على J

ومن المعادلة (9) يكون المتجه $\Phi_{n+1}(x)$ متجه دوال مستمرة على المجال J .

إذن كل متجه $\Phi_n(x)$ هو متجه دوال معرفة ومستمرة على المجال J .

بما أن g, A مستمرتـــان علـــى المجـــال المنتهـــي المغلـــق J فان $|A(x)|$ و $|g(x)|$ محدودتان على J ليكن L, K ثابتين حيث أن :

$$|A(s)|\le K \ , \ |g(s)|\le L \ , \ s\in J$$

ليكن $M = K|y_0| + L$ فانه من الممكن إثبات المتراجحة التالية :-

$$\left|\Phi_{n+1}(x)-\Phi(x)\right| \leq \frac{MK^{n}(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)}$$

من اجل ......$n=0,1,2$ و $x \in J$ بنفس الطريقة المذكورة في الفصل السابق ،والفرق الوحيد هو أن (10) صالحة من اجل جميع قيم x التي تنتمي إلى J ، أما باقي الإثبات فهو ينبثق تماما من برهان نظرية وجود حل المعادلة التفاضلية التي سبق تقديمها في الفصل السابق .

بما أن J هو مجال جزئي منته مغلق اختياري من I فان النظام (7) حل $\Phi(x)$ على المجال I حيث $\Phi(x) = Lim\Phi_{n+1}(x)$

يبقي الآن إثبات أن الحل $\Phi(x)$ هو حل وحيد للنظام (7) على المجال J .

نفرض أن لمسألة القيم الابتدائية (7) حلا آخر $\psi(x)$ على المجال I وبالتالي يكون لدينا :-

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_2}^{x}\left[A(s)\Phi(s) + g(s)\right]ds$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x}\left[A(s)\psi(s) + g(s)\right]ds$$

وبطرح المعادلتين نجد أن :-

$$\Phi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} A(s)\left[\Phi(s) - \psi(s)\right]ds$$

بأخذ القيمة القياسية واستعمال $|A(s)| \leq K$ نجد أن :-

$$\left|\Phi(x)-\psi(x)\right| \leq K\int_{x_0}^{x}\left|\Phi(s) - \psi(s)\right|ds$$

وباستعمال متراجحة كراون وال (الفصل السابق) نجد أن $0 \le \left|\Phi(x) - \psi(x)\right|$

وبما أن $\left|\Phi(x) - \psi(x)\right|$ غــير ســالب فيكــون لدينـــا $\left|\Phi(x) - \psi(x)\right| = 0$ أي

$\psi = \Phi$

وهكذا ينتهي برهان النظرية .

<u>**مثال -7-**</u>

نعتبر مسالة القيم الابتدائية التالية (حيث n=3) :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 \\ \frac{1}{x^{2-1}} & 0 & -1 \\ 2 & \frac{1}{x^2+1} & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad g(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ \cos x \\ -e^x \end{bmatrix} \quad , \; x_0 = 0 \; , \; y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بين أن لهذه المسالة حلا وحيدا ثم جد المجال I لوجود هذا الحل حسب النظرية -1-

كل عناصر المصفوفة $A(x)$ المتجـــه $g(x)$ هـــي دوال مســـتمرة علـــى المجـــال $-\infty < x < \infty$ عدا الدالة $\frac{1}{x^2-1}$.

في هذه الحالة الدالة $\frac{1}{x^2-1}$ غير مستمرة عند $x = \pm 1$

وبما أن $x_0 = 0$ فان النظرية (1) تؤكد لنا أن لمسألة القيم الابتدائية حلا واحـــدا Φ حيث $\Phi(0) = y_0$ وأن الحل موجود على المجال $-1 < x < 1$.

وواضح انه إذا اخترنا نقطة أخرى x_0 مثل $x_0 = 10$ فانه لمســـالة القيـــم الابتدائيـــة الجديدة حلا واحد $\psi(x)$ حيث $\psi(x_0) = y_0$ وان مجال وجود هذا الحل هـــــــو $-1 < x < \infty$.

سندرس في هذه الفقرة تركيبة حلول النظام :-

$$y' = A(x)y + g(x) \qquad (11)$$

إذا كان $g(x) \neq 0$ فالنظام (11) نظام غير متجانس والذي نلحق به النظـــام المرفــق الخطي المتجانس التالي :

$$y' = A(x)y \qquad (12)$$

وسندرس في هذه الفقرة التركيبة الجبرية لمجموعة الحلول لهذا النظام (12) . وبنـــاء على التعريف $-3-$ من الفقرة $-2-$ فان حل هذا النظام (12) هو متجــه $U(x)$ والذي مشتقته مستمرة على المجال I .

باستعمال مصطلحات الجبر الخطي نقول ان حل النظام (12) هو عنصر من الفضاء الاتجاهي $C_n'(\mathrm{I})$ للدوال ذات n مركبة والتي قيمتها حقيقيـــة أو تخيليـــة ومشـــتقاتها الأولى مستمرة على المجال I حيث :

C ترمز إلى الاستمرار و $(')$ ترمز إلى المشتقة الأولى والدليل n يعنى أن كـــل متجه له n مركبة و I يمثل المجال الذي أخذناه بعين الاعتبار .

ليكن f هي مجموعة من الأعداد الحقيقية أو المركبة .

تعريف -5-

الفضاء الاتجاهي V على f هو مجموعة عناصر تدعي متجهات .

نعرف على V عمليتين :- **العملية الأولى** هي عملية الجمع **والعملية الثانيـــة** هـــي عملية بضرب في عدد ثابت حيث :-

1-من اجل كل زوج من المتجهات $U,\vartheta \in V$ فان $W = U + \vartheta \in V$

ويسمى W بمجموع المتجهين U,ϑ

2- من اجل كل متجه $U \in V$ ومن اجل كل ثابت $\propto$ من f فان $\propto U \in V$ ويسمى هذا المتجه بحاصل ضرب $\propto$ وU وتحقق هاتان العمليتان الخواص التالية :-

ج1- $\forall U,\vartheta,w \in V$ فان $U + (\vartheta + w) = (U + \vartheta) + w$

ج2- $\forall U \in V$ فانه يوجد عنصر حيادي يرمز له ب 0 حيث $U + 0 = U$

ج3 - $\forall U \in V$ فانه يوجد متجه واحد ϑ حيث $U + \vartheta = 0$

ويرمز للمتجه ϑ بالرمز $-U$ يسمى المتجه العكسي .

ج4- $U + \vartheta = \vartheta + U$ من اجل $U,\vartheta \in V$

ض1- $\forall \propto \in f$ و $\forall U,\vartheta \in V$ فان $\propto (U + \vartheta) = \propto U + \propto \vartheta$

ض2- $\forall \propto,\beta \in f$ و $\forall U \in V$ فان $(\propto + \beta)U = \propto U + \beta U$

ض3- $\forall \propto,\beta \in f$ و $\forall U \in V$ فان $(\propto \beta)U = \propto (\beta U)$

ض4- $\forall U \in v$ فان $1U = U$

تعريف -6-

ليكن V فضاء اتجاهيا على f فان المجموعة الجزئية W من V $(W \subseteq V)$ تسمى بالفضاء الجزئي لـ V إذا وإذا فقط W هو نفسه فضاء اتجاهي على f مع نفس العمليتين الجمع والضرب في ثابت .

ليكن $\vartheta(x),U(x)$ حلين للنظام (12) على المجال I وليكن $\propto,\beta$ ثابتين اختياريين حقيقيتين أو مركبتين ، فان $\propto U(x) + \beta\vartheta(x)$ هو أيضا حل للنظام (12) على I ويكون لدينا :

$$\begin{aligned}[\propto U(x) + \beta\vartheta(x)]' &= \propto U'(x) + \beta\vartheta'(x) = \propto A(x)U(x) + \beta A(x)\vartheta(x) \\ &= A(x)[\propto U(x) + \beta\vartheta(x)]\end{aligned}$$

وهذا يعني أن كل توافقية خطية من الحلول للنظام (12) هي أيضا حل للنظام (12) وبالتالي مجموعة كل حلول النظام (12) هو فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي $C'_n(\mathrm{I})$.

ملاحظة :-

انه من السهل التحقق أن المتجهات التالية في الفضاء $C'_n(\mathrm{I})$ هي مستقلة خطيا

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{t}\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}\mathrm{t}^k\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

من اجل k عدد صحيح بموجب

ويكون بعد الفضاء $C'_n(\mathrm{I})$ هو عبارة عن عدد المتجهات المستقلة خطيا في $C'_n(\mathrm{I})$. وواضح أن بعد $C'_n(\mathrm{I})$ غير منته لان k عدد صحيح اختياري موجب وهذه الحقيقة مهمة بالنسبة لمسالة إيجاد بعد الفضاء الاتجاهي V لحلول النظام (12) الذي فضاء جزئي $C'_n(\mathrm{I})$ وتلخص لنا هذه النتيجة النظرية التالية :-

نظرية -2-

إذا كانت $A(x)$ مصفوفة $n\times n$ مركبة ومستمرة على المجال I فان حلول النظام:-

$$y' = A(x)y$$

على المجال I تكون فضاء اتجاهيا V علي مجموعة الأعداد المركبة بعده n .

ملاحظـــة :-

من الملاحظات السابقة على النظرية فان هذا يعني لإيجاد أي حل للنظام (12) يكفـــي إيجاد عدد منته من الحلول للنظام (12) بمعنى آخر لإيجاد المجموعـــة التـــي تكـــون القاعدة (قاعدة الحلول) للفضاء الاتجاهي V .

البرهـــان :-

لقد أثبتنا أن الحلول تكون الفضاء الاتجاهي V على الأعداد المركبة و لإثبات أن بعـــد V هو n ، يستلزم تكوين قاعدة للفضاء V المتكونة من n متجه مستقلة خطيا في V وهذه هي الحلول المستقلة خطيا للنظام (12) على المجال I .

لتكن x_0 نقطة من المجال I ولتكن $\sigma_1,\sigma_2,\ldots\ldots,\sigma_n$ ، n متجه مســتقلة خطيا من الفضاء الاقليدي المركب . على سبيل المثال $e_1,e_2,e_3,\ldots\ldots,e_n$

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow J \text{ الصف}$$

هي n متجه من هذا النحو

وبنـــاء علـــى النظريـــة -1- فـــان النظـــام (12) يملـــك n حـــل $\Phi_1,\Phi_2,\ldots\ldots,\Phi_n$ كل منها موجود على المجال I ، وكـــل حـــل يحقـــق الشرط الابتدائي :

$$\Phi_j(x_0)=\sigma_j \quad , \quad j=1,2,\ldots\ldots n \qquad (13)$$

أولا يجب أن نثبت أن الحلول $\Phi_1,\Phi_2,\ldots\ldots,\Phi_n$ مستقلة خطيا على المجال I . وهذا يستدعى أن يستخدم فحص التوفيقات الخطية لهذه الدوال الاتجاهية مع معاملات ثابتة .

نفرض انه يوجد ثوابت مركبة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ حيث أن :

$$a_1\Phi_1(x)+a_2\Phi(x)+\ldots\ldots\ldots+a_n\Phi_n(x)=0, \propto x\in I$$

وخصوصا إذا وضعنا $x=x_0$ واستعملنا الشروط الابتدائية (13) نجد أن :-

$$a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+\ldots\ldots\ldots+a_n\sigma_n=0$$

وهذا يؤدي إلى انه كل الثوابت $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ معدومة لان قد فرضنا أن المتجهات

$\sigma_1,\sigma_2,\ldots\ldots,\sigma_n$ مستقلة خطيا .

إذن $\Phi_1,\Phi_2,\ldots\ldots.\Phi_n$ هي أيضا مستقلة خطيا على المجال I .

ولاستكمال برهان النظرية سنثبت أن هذه الـ n حل المستقلة خطيا للنظام (12) تغطي الفضاء V .

لدينا الخاصة أن كل حل $\psi(x)$ للنظام (1) يمكن (1) تمثيله على شكل توافقية خطية للحلول $\Phi_1,\Phi_2,\ldots.,\Phi_n$.

نحسب قيمة الحل ψ عند x_0 وليكن $\psi(x_0)=\sigma$ بما أن المتجهات الثابتة $\sigma_1,\sigma_2,\ldots\ldots,\sigma_n$ تكون قاعدة للفضاء الاقليدي المركب . فانه توجد ثوابت وحيدة $c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n$ حيث أن المتجه الثابت σ يمكن تمثيله كما يلي :-

$$\sigma=c_1\sigma_1+c_2\sigma+.........+c_n\sigma_n$$

لتعتبر الآن المتجه

$$\Phi(x)=c_1\Phi_1(x)+c_2\Phi_2(x)+.........+c_n\Phi(x)$$

وواضح أن $\Phi(x)$ هو حل للنظام (12) والقيمة الابتدائية لـ Φ هي :

$$\Phi\left(x_0\right)=c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+.........+c_n\sigma_n=\sigma$$

لذلك $\Phi(x)$ و $\psi(x)$ همـا حـلان اثنـان للنظـام (12) علـى المجـال I حيـث $\sigma=\Phi(x_0)=\psi(x_0)$
إذن بناء على نظرية -1- وجود وجدانية الحل فـان $\Phi(x)=\psi(x)$ مـن اجـل كل n على المجال I والحل $\psi(x)$ يعبر عن التوافقية الخطية الوحيدة

$$\psi(x)=c_1\Phi_1(x)+c_2\Phi(x)+.......+c_n\Phi_n(x) \qquad \textbf{(14)}$$

$\forall x\in I$

ملاحظـة :-

الآن إذ كونا مصفوف $n\times n$ باستعمال الحلول n المستقلة خطيا كـأعمدة فنحصـل علي مصفوف الحل على المجال I و أعمدتها دائما تكون مستقلة خطيا على المجال I . مصفوفة الحل التي أعمدتها مستقلة خطيا على I تسمى بالمصفوفة الأساسية للنظـام (12) علي I . ونرمـز للمصفوفـة الأساسـية المكونـة مـن الحلـول $\Phi_1,\Phi_2,.......,\Phi_n$ كأعمدة بالرمز Φ .

إذن كل حل ψ هو عبارة عن توافقية خطية (14) من اجل اختيار وحيد للثوابت $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ وهو ببساطة من الصورة :-

$$\psi(x) = \Phi(x)c \qquad (15)$$

حيث Φ هي المصفوفة الأساسية المكونة آنفا و C هي المتجه العمودي ذو المركبات $c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_n$.

ونلاحظ من خلال ما تقدم انه لإيجاد أي حل للنظام (12) يستلزم إيجاد المصفوفة الأساسية . والسؤال التي يطرح نفسه هو : لنفرض أننا وجدنا مصفوفة الحل للنظام (12) علي مجال ما I . كيف يمكن اختبار بطريقة بسيطة ان مصفوفة الحل هي المصفوفة الأساسية . والجواب عن هذا السؤال محتواه في نتيجة النظرية التالية :-

نظرية -3-

مصفوفة الحل Φ للنظام

$$y' = A(x)y$$

هي المصفوفة الأساسية إذا وإذا فقط $\det \Phi(x) \neq 0$ من اجل كل $x \in I$. بالإضافة إذا كان $\det \Phi(x_0) \neq 0$ من اجل x_0 في I فان $\det \Phi(x) \neq 0$ من اجل كل x في I .

حيث يرمز $\det \Phi(x)$ إلى محددة المصفوفة $\Phi(x)$

مثال -8-

بين أن المصفوفة
$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

هو مصفوفة أساسية للنظام
$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y$$

حيث $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

الحــل :-

أولا يجب أن نثبت أن هذه المصفوفة هي مصفوفة الحل . لتكن $\Phi_1(x)$ هي العمــود أقاول من المصفوفة $\Phi(x)$ إذن .

$$\Phi_1'(x)=\begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Phi_1(x)$$

من اجل $-\infty < x < \infty$

بالمثل إذا كانت $\Phi_2(x)$ هي العمود الثاني في $\Phi(x)$ يكون لدينا :-

$$\Phi_2'(x)=\begin{bmatrix} (x+1)e^x \\ e^x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} xe^x \\ e^x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Phi_2(x)$$

من اجل $-\infty < x < \infty$

إذن $\Phi(x)=[\Phi_1(x),\Phi_2(x)]$ هي مصفوفة الحل على المجال $-\infty < x < \infty$

بناء على النظرية -3- بما أن $\det\Phi = e^{2x} \neq 0$ ؛ $\Phi(x)$ هـــي مصفوفــة أساسية على المجال $-\infty < x < \infty$

وبناء على النظرية - 3 - أيضا فانه يمكن حساب $\det\Phi(x)$ عند نقطة واحدة لتكــن هذه النقطة $x=0$

وبما أن $\Phi(0)=I$ فان هذا يؤدي إلى إن $\det\Phi(0)=1\neq 0$

تمرين –2–

اثبت باستعمال النظرية –3– أن المصفوفة $\Phi(x)=\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

هي مصفوفة أساسية للنظام $y' = Ay$ حيث

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تطبيق :–

سنطبق النظرية –3– على المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية التالية :–

$$y'' + \rho(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \textbf{(16)}$$

حيث q, ρ دالتان مستمرتان على المجال I . وكما رأينا في المثال –5– في التعريف –4– من الفقرة –2– أن هذه المعادلة تكافئ النظام التالي .

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & \rho(x) \end{bmatrix} y \quad , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(17)}$$

إذا كانت $\Phi(x)$ هي مصفوفة الحل للنظام (17) على المجال I أذن

$$\Phi(x) = [\Phi_1(x) \ , \ \Phi_2(x)]$$

حيث

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix} \quad , \quad \Phi_2(x)\begin{bmatrix} \psi_2(x) \\ \psi_2(x) \end{bmatrix}$$

و$\psi_2(x), \psi_1(x)$ و هما حلان للمعادلة الخطية

وبناء على النظرية –3– فان $\Phi(x)$ هي المضمونة الأساسية للنظام (17) على المجال I إذا وإذا فقط

$$\det \Phi(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

هذه المحددة تسمى بالرانسيكان للدالتين ψ_2 , ψ_1 .

إذن وفق النظرية $-2-$ إذا كان $\det \Phi(x) \neq 0$ فان الحلين $\psi_2(x), \psi_1(x)$ للمعادلة (16) مستقلان خطيا على المجال I ، وكل حل للمعادلة (16) يمكن أن يكتب على الشكل توافقية خطية للدالتين $\psi_2(x), \psi_1(x)$

وهذا النصف الأول للنتيجة التي سبق أن أثبتناها في فصل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والتي نصها كما يلي .

نظرية -4-

إذا كان ψ_2 , ψ_1 حلين للمعادلة (16) على المجال I فإنها مستقلتان خطيا إذا وإذا فقط كان رانسكيان الدالتين $W[\psi_1(x), \psi_2(x)]$ غير معدوم على المجال I .

ملاحظة :-

بنفس الطريقة يمكن تعميم هذه النتيجة بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n.

نظرية -5-

إن مجموعة الحلول $\psi_1 , \psi_2 , ..., \psi_n$ على المجال I للمعادلة :

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + ... + P_n(x) y = 0 \qquad (18)$$

حيث $P_1 , P_2 , ..., P_n$ دوال مستمرة على I . مستقلة خطياً على I إذا وإذا فقط كان رانسكيان هذه الدوال $W[\psi_1(x), \psi_2(x), ..., \psi_n(x)]$ غير معدوم على المجال I .

وتكّون مجموعة n الحل المستقلة خطياً للمعادلة (18) القاعدة الأساسية للحلول .

XIV -5- النظـم الخطيـة غيـر المتجانسـة
Linear Nonhomogeneous Systems

سنستعمل الآن الدراسة المفصلة في الفقرتين السابقتين لدراسة شكل حلـــول النظـــام الخطي غير المتجانس التالي :

$$(19) \qquad y' = A(x)y + g(x)$$

حيث $A(x)$ مصفوفة مستمرة و $g(x)$ متجه مستمر على نفس المجال I. طبعا يبقى كل التحليل التالي متعلق بإمكانية وجود المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس المرفـــق $y' = A(x)y$

بناء ا على النظرية –1– إذا كانت لدينا نقطة ما (x_0, y_0) حيث $x_0 \in I$ فانه يوجـد حل واحد Φ للنظام (19) على المجال I حيث $\Phi(x_0) = y_0$.

لتكوين حلول النظام (19) نفرض ان $\Phi(x)$ هي المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس

$$y' = A(x)y$$

على المجال I

وكنتيجة للنظرية –2– فان Φ موجودة .

نفرض أن Φ_2, Φ_1 حلين للنظام (19) إذن $\Phi_1 - \Phi_2$ هو حل للنظام المتجانس علـــى المجال I .

وبناء على النظرية –3– فانه يوجد متجه ثابت C حيث :-

$$(20) \qquad \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi.C$$

معنى هذا انه يكفي لإيجاد أي حل للنظام (19) ، معرفة حل واحد لـــهذا النظـــام لان الحل الأخر يمكن الحصول عليه من العبارة (20) .

وهناك طريقة بسيطة لتعيين حل النظام (19) وتسمى هذه الطريقة بطريقة تغيير الثوابت والتي تتطلب معرفة المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس .
لتكن Φ المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس على المجال I وسنحاول إيجاد الحل Ψ للنظام (19) من الصورة :

$$\Psi(x) = \Phi(x)V(x) \qquad (21)$$

حيث V متجه يتطلب تعيينه - (وواضح انه إذا كان V ثابتاً فان Ψ تصبح حلاً للنظام المتجانس ولهذا سنتجنب هذا الأمر) . بالتعويض عن (21) في (19) نجد أن من اجل $x \in I$:

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= \Phi'(x)V(x) + \Phi(x)V'(x)\\ &= A(x)\Phi(x)V(x) + g(x)\end{aligned}$$

وبما أن $\Phi(x)$ المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس أي $\Phi' = A\Phi$
إذن :- $\Phi(x).V'(x) = g(x)$
وبما أن $\Phi(x)$ مصفوفة غير منفردة على المجال I ، فانه يمكن نقلها إلى الطرف الثاني من المعادلة :-

$$V'(x) = \Phi^{-1}(x)g(x)$$

وبمكاملة هذا النظام نجد أن :-

$$V(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)g(s)ds, \quad x_0 \;, \; x \in I$$

وبالتالي تصبح المعادلة (21) من الصورة :-

$$\Psi(x)=\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)g(s)ds \quad , \quad x_0 \quad , \quad x\in I \qquad (22)$$

إذن إذا كـــان للنظـــام (19) حــلاً Ψ من الصورة (21) فانه يعطي بالعلاقــة (22) وتكون قد أثبتنا نتيجة النظرية التالية :-

نظريـــة -6-

إذا كانت Φ هي المصفوفة الأساسية للنظام

$$y' = A(x)y$$

على المجال I . فان الدالة

$$\Psi(x)=\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

هي الحل الوحيد للنظام

$$y' = A(x)y + g(x)$$

الذي يحقق الشرط الابتدائي :-

$$\Psi(x_0)=0$$

على المجال I .

ملاحظـــة :

بإدماج النظرية -6- والملاحظات التي بدأنا بها في هذه الفقرة نرى أن أي حـــل ϕ للنظام على المجال I يكون من الصورة :

$$\phi(x) = \phi_h(x) + \psi(x) \qquad (23)$$

حيث Ψ حل النظام (19) الذي يحقق الشروط الابتدائيـــة $\Psi(x_o) = 0$ و ϕ_h حـــل النظام المتجانس الذي يحقق الشروط الابتدائية التالية :

$$\phi_h(x_o) = Y_o$$

على سبيل المثال.

<u>مثال -9-</u>

جد حل مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad Y(o) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحـــل :

لقد رأينا في المثال -8- أن:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة أساســـية للنظـــام المتجـــانس المرفـــق لـــهذا النظـــام علـــى المجـــال $-\infty < x < \infty$.

بأخذ المصفوفة العكسية للمصفوفة Φ نجد أن:

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{e^{2s}} \begin{bmatrix} e^s & -se^s \\ 0 & e^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-s}$$

إذن بناءا على النظرية -6- ، يكون الحل Ψ الذي يحقق الشرط $\Psi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ من الصورة التالية :

$$\Psi(x)=\begin{bmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} \end{bmatrix}\int_0^x e^{-s}\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix}ds$$

$$=\begin{bmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} \end{bmatrix}\int_0^x \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-e^{-sx}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن $\Phi(0) = I$ ، فإن حل النظام المتجانس المرفق الذي يحقق الشـــرط الإبتدائـــي التالي:

$$Y(0)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يكون من الصورة:

$$\Phi_h(x)=\Phi(x)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (x-1)e^{x} \\ e^{x} \end{bmatrix}$$

ومن العلاقة (23) يكون الحل المطلوب من الصورة:

$$\phi(x)=\phi_h(x)+\Psi(x)=\begin{bmatrix} xe^{x}-\frac{1}{2}(e^{x}+e^{x}) \\ e^{x} \end{bmatrix}$$

XIV ـ6ـ النظــم الخطيــة ذات المعامــلات الثابتــة:
Linear Systems with Constant Coefficients

في هذه الفقرة سندرس كيفية إيجاد المصفوفة الأساسية للنظام $Y'=AY$ حيث A مصفوفة (nxn) ثابتة .

وحساب المصفوفة الأساسية مباشرة يتطلب دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات. وبالتالي يجب تقديم المصطلحات المتعلقة بالجبر الخطي.

1- آسية المصفوفة The Exponential of a Matrix

في إطار إيجاد المصفوفة الأساسية للنظام :

$$Y'=AY \tag{24}$$

يجب أولا تعريف آسية المصفوفة. إذا كانت M مصفوفة (nxn) نعرف المصفوفة e^M من الصورة التالية :

$$e^M = 1+M+\frac{1}{2!}M^2+\frac{1}{3!}M^3+.........+\frac{1}{k!}M^k+.........=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^k}{k!} \tag{25}$$

حيث 1 مصفوفة الوحدة (nxn). وليس من الصعب أيضا تعريف مصطلح تقارب متسلسلة المصفوفات وإثبات ذلك . ومن أهم خصائص المصفوفة الآسية ما يلي:

أ- إذا كانت M , P مصفوفتين (nxn) متبادلتين (MP=PM) فإن :

$$e^{M+P} = e^M.e^P \tag{26}$$

ويمكن إثبات هذه الخاصية بسهولة حيث أن الطرف الأول يعطى :

$$e^{M+P} = \sum_{\Re=0} \frac{(M+P)^{\Re}}{k!}$$

وبناء على نظرية ذي الحدين و $MP = PM$ ،

$$(M+P)^{\Re} = \sum_{\ell=0}^{\Re} \frac{\Re!}{\ell!(k-\ell)!} M^{\ell} P^{\Re-\ell}$$

إذن :

$$e^{M+P} = \sum_{\Re=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\Re} \frac{M^{\ell}}{\ell!} \cdot \frac{P^{\Re-1}}{(k-\ell)!} \qquad (27)$$

ومن جهة أخرى:

$$e^{M} . e^{P} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^{i}}{i!} \sum \frac{P^{j}}{j!}$$

وباستخدام علاقة ضرب متسلسلتين متقاربتين مطلقا نجد أن :

$$e^{M} . e^{P} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$

حيث :

$$C_k = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{M^{\ell}}{\ell!} \cdot \frac{P^{\Re-\ell}}{(k-\ell)!} \qquad (28)$$

وبمقارنة (27) ، (28) . نكون قد أثبتنا (26) .

ب- إذا كانت T مصفوفة (nxn) غير منفردة فإن:

$$T^{-1} e^{(M)} T = e^{(T^{-1}MT)} \qquad (29)$$

ويمكن الآن إثبات النتيجة الأساسية التالية للنظام الخطي ذي المعاملات الثابتة .

<u>نظريـــة (7) :</u>

المصفوفـــة :

$$\Phi(x) = e^{Ax} \qquad \textbf{(30)}$$

هي المصفوفة الأساسية للنظام (24) حيث $\Phi(0)=1$ على المجال $-\infty < x < \infty$.

البرهان :

باستعمال المعادلة (25) حيث $A, \quad M = Ax$ مصفوفة (nxn) نجد أن:

$$\left[e^{Ax}\right]' = A + \frac{A^2x}{1!} + \frac{A^3x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A^{\mathfrak{R}}x^{\mathfrak{R}-1}}{(k-1)!} + \ldots\ldots$$

ولدينا أيضاً e^{Ax} هي مصفوفة الحل للنظام (24) [أعمدتها هي حلول للنظام (24)].

وبما أن : $\det\Phi(0) = \det 1 \neq 0$

إذن وفق النظرية -3- فإن $\Phi(x)$ مصفوفة أساسية للنظام (24).

<u>ملاحظـــة :</u>

نستنتج من النظرية -7- والمعادلة (15) أن أي حل للنظام (24) يكون على الصورة:

$$\Phi(x) = e^{Ax}.C \quad ; \quad -\infty < x < \infty \qquad \textbf{(31)}$$

حيث C متجه ثابت اختياري .

مثال -10-

جد المصفوفة الأساسية للنظام $Y' = AY$ إذا كانت A مصفوفة قطرية من الصورة :

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & d_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

الحل :

من المعادلة (24) يكون لدينا :

$$e^{Ax} = I + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & \ddots d_n \end{bmatrix}\frac{x}{1!} + \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & \ddots d_n^2 \end{bmatrix}\frac{x^2}{2!} + \dots\dots\dots + \begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & \ddots d_n^k \end{bmatrix}\frac{x^k}{k!} + \dots\dots\dots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1 x} & & 0 \\ & e^{d_2 x} & \\ 0 & & \ddots e^{d_n x} \end{bmatrix}$$

ومن النظرية -7- فإن هذه المصفوفة هي المصفوفة الأساسية :

مثال-11-:

جد المصفوفة الأساسية للنظام $Y' = AY$.

إذا كانت : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

الحــل :

بما أن
$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

وواضح أن هاتين المصفوفتين متبادلتين إذن :

$$e^{Ax}=e^{\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}x}.e^{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{3x} & 0\\ 0 & e^{3x}\end{bmatrix}\left\{1+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2\frac{x^2}{2!}+........\right\}$$

ولكن :
$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

فإن المتسلسلة اللانهائية تصبح من الصورة التالية:

$$e^{Ax}=e^{3x}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & x\end{bmatrix}$$

ومن خلال النظرية -7- فإن المصفوفة هي المصفوفة الأساسية.

2ـ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات

Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices

في إطار إيجاد التمثيل العام لحلول النظام (24) يجب إدخال مصطلح القيمة الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة.

ولتعليل هذا المفهوم، نأخذ النظام: $Y' = AY$

ونأخذ الحل من الصورة : $C \neq 0$ و $\Phi(x) = e^{\lambda x} C$

حيث الثابت λ . والمتجه C يجب تعينهما .

بالتعويض نرى أن $e^{\lambda x} C$ هو حل إذاً وفقط إذا كان :

$$\lambda e^{\lambda x} C = A e^{\lambda x} C$$

وبما أن $e^{\lambda x} \neq 0$ فإن هذا الشرط يصبح من الصورة : $(\lambda 1 - A)C = 0$

والذي هو عبارة عن نظام جبري خطي متجانس بالنسبة للمتجه C . وبناءً على نظرية الجبر الخطي للأنظمة الجبرية فإن هذا النظام يقبل حلاً غير معدوم إذاً وإذا فقط كان اختيار λ يحقق الشرط :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

وهذا يؤدي إلى التعاريف التالية :

التعريف -7-

لتكن A مصفوفة (nxn) (حقيقية أو مركبة)، القيمة الذاتية للمصفوفة A هي الثـــابت λ حيث أن النظام الجبري :

$$(\lambda I - A)X = 0 \qquad (31)$$

يقبل حلاً غير معدوم .

كل حل غير معدوم للنظام (32) يسمى بالمتجه الذاتي للمصفوفة A المقـــابل للقيمـــة الذاتية λ .

التعريف -8-

كثير الحدود من الدرجة n : $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

يسمى بكثير الحدود المميز للمصفوفة A.

وبالتالي، يبين الحساب الذي سبق التعريف -7- أن $e^{\lambda x}C$ هو حل للنظـــام الخطـــي $Y' = AY$ إذاً وإذاً فقط كانت λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A و C هو المتجـــه الذاتي المرافق لهذه القيمة.

وأن القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور كثير الحدود $P(\lambda) = 0$.

مثال -12-

جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرفقة للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحــل :

القيم الذاتية للمصفوفة A هي جذور المعادلة :

$$\det[A-\lambda I]=\begin{vmatrix}3-\lambda & 5\\ -5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+34=0$$

إذن : $\lambda_1=3+5i$ و $\lambda_2=3-5i$ حيث $i^2=-1$

يحقق المتجه الذاتي $U=\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}$ المرفق للقيمة الذاتية λ_1 النظـــام الجــبري الخطـــي المتجانس التالي :

$$(A-\lambda_1 I)U=\begin{bmatrix}-5i & 5\\ -5 & -5i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}=0$$

إذن :

$$\begin{aligned}-iU_1+U_2&=0\\ -U_1-iU_2&=0\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$U=\propto\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$$

هو متجه ذاتي من أجل أي ثابت $\propto$.

بالمثل المتجه الذاتي $\vartheta=\begin{bmatrix}\vartheta_1\\\vartheta_2\end{bmatrix}$ المرفق للقيمة الذاتية λ_2 يكون من الصورة :

$$\vartheta = \beta \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

من أجل أي ثابت β .

مثال -13-

جد القيم الذاتية للمصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

الحــل :

لنأخذ المعادلة : $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

إذن $\lambda = 3$ وهي قيمة مضاعفة ذاتية للمصفوفة A .

لإيجاد المتجه الذاتي نأخذ النظام: $(3I - A)C = 0$

أو

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{matrix}$$

فأي متجه C حيث المركبتين متساويتين $C_1 = C_2$ ، هو متجه ذاتي .

إذن : $C = \propto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

هو متجه ذاتي حيث $\propto$ ثابت ما.

ملاحظــة :

في المثال -13- المتجهان ϑ, U مستقلان خطياً إذا كان $\propto \neq 0$ و $\beta \neq 0$ لأن :

$$\det[U,\vartheta]=\begin{vmatrix} \propto & \beta i \\ \propto i & \beta \end{vmatrix}=2\propto\beta\neq 0$$

وبالتالي يكون المتجهان ϑ, U قاعدة الفضاء الإقليدي ذي بعدين.

وعموماً إذا كان للمصفوفة $A(nxn)$ n قيمة ذاتية مختلفة فــإن المتجــهات الذاتيــة المرفقة تكون قاعدة الفضاء الإقليدي المركب الذي بعده n.

نظرية -8-

مجموعة المتجهات الذاتية k المرفقة إلى القيم الذاتية k المختلفة فهي مستقلة خطياً .

البرهان:

سنثبت هذه النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد k من المتجهات الذاتية .

من أجل $k=1$ النتيجة عادية .

الآن نفرض أن مجموعة المتجهات الذاتية $(p-1)$ المرفقة إلى القيــم الذاتيــة $(p-1)$ المختلفة للمصفوفة A المعطاة مستقلة خطياً .

ليكــن $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots\ldots\ldots, \vartheta_p$ متجــهات ذاتيــة للمصفوفــة A للقيــم الذاتيــة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda_p$ على الترتيب حيث $\lambda_i \neq \lambda_j$ نم أجل $i \neq j$.

نفرض أنه توجد مجموعة ثوابت $C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_p$ ليست كلها معدومة حيث أن :

$$C_1\vartheta_1 + C_2\vartheta_2 + ...+ C_P\vartheta_P = 0$$

نفرض أن $C_1 \neq 0$ وبتطبيق $(A - \lambda_1 I)$ على طرفي هذه المعادلة مع الأخـــذ بعيــن الاعتبار أن :

$$(A - \lambda_1 I)\vartheta_j = (\lambda_j - \lambda_1)\vartheta_j \quad (j = 1, ..., n)$$

فنحصل على :

$$C_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vartheta_2 + C_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vartheta_3 + ...+ C_P(\lambda_P - \lambda_1)\vartheta_P = o$$

لكـــن $\vartheta_2, \vartheta_3, ..., \vartheta_P$ مســتقلة خطيــاً بفرضيــة الــتراجع وبالتـــالي $C_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$ حيث $j = 2,3,......., p$.

بما أن $\lambda_j \neq \lambda_1$ حيث $j = 2,3,......., p$ إذن يكون $C_j = 0$

حيث $j = 2,3,......., p$ وتصبح المعادلة من الشكل : $C_1\vartheta_1 = 0$

وبما أن $\vartheta_1 \neq 0$ فإن $C_1 = 0$ والذي يثبت أن $\vartheta_2, \vartheta_3, ..., \vartheta_P$ مستقلة خطيا.

وهكذا ينتهي إثبات النظرية بالتراجع .

3. حساب المصفوفة الأساسية Calculation of a Fundamental Matrix.

لقد سبق أن رأينا في النظرية -7- أن e^{At} هي المصفوفة الأساسية للنظام الخطي الذي معاملات ثابتة : $Y'=AY$

ورأينا في الأمثلة السابقة كيف يمكن حساب e^{At} في بعض الحالات الخاصة ، وسنثبت الآن كيف يمكن حساب المصفوفة الأساسية Φ للنظام $Y'=AY$ في حالة أن للمصفوفة A ، n متجها ذاتيا مستقلا خطيا. هذا في الحالة الخاصة إذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة .

لنفرض أن للمصفوفة A ، n متجها ذاتيا مستقلا خطيا : $\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n$ المرفقة للقيم الذاتية (ليس شرطا أن تكون كلها مختلفة) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ فتكون لدينا كل دالة اتجاهيه من الصورة :

$$\phi_j = e^{\lambda_j x}\vartheta_j \qquad j = 1, ..., n$$

حل للنظام $Y'=AY$ على المجال $-\infty < x < \infty$

أي:

$$\phi_j'(x) = (e^{\lambda_j x})\lambda_j \vartheta_j$$

$$= e^{\lambda_j x} A \vartheta_j$$

$$= Ae^{\lambda_j x}\vartheta_j = A\phi_j(x) \qquad , \qquad j = 1, ..., n$$

تعرف المصفوفة Φ كما يلي :

$$\Phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_n(x)]$$

بما أن كل عمود من المصفوفة Φ هو حل للنظـــام $Y'=AY$ فالمصفوفـــة Φ هـــي مصفوفة الحل لهذا النظام على المجال $-\infty < x < \infty$.

ويكون لدينا :
$$\det\Phi(0)=\det[\vartheta_1,\vartheta_2,........,\vartheta_n]\neq 0$$

لأن المتجهات $\vartheta_1,\vartheta_2,........,\vartheta_n$ مستقلة خطيا وبالتالي وفق النظرية -3- يكون لدينا $\det\Phi(x)\neq 0$ على المجال المفتوح $-\infty < x < \infty$. وبالتـــالي فالمصفوفـــة $\Phi(x)$ هي المصفوفة الأساسية لهذا النظام .

ونكون بالتالي قد أثبتنا النتيجة الثالثة :

نظرية -9-

لتكن A مصفوفة ثابتة (حقيقية أو مركبة) ولنفرض أن $\vartheta_1,\vartheta_2,........,\vartheta_n$ هـــي nمتجه ذاتي مستقلة خطيا للمصفوفة A المرفقة للقيم الذاتية التالية علـــى الـــترتيب : $\lambda_1,\lambda_2,........,\lambda_n$

إذن :

$$\Phi(x)=\left[e^{\lambda_1 x}\vartheta_1,e^{\lambda_2 x}\vartheta_2,............,e^{\lambda_n x}\vartheta_n\right] \qquad (32)$$

هي المصفوفة الأساسية للنظام الخطي الذي معاملاته ثابتة: $Y'=AY$ على المجـــال $-\infty < x < \infty$. وهذه هي الحالة التي تكون فيها: $\lambda_1,\lambda_2,........,\lambda_n$ كلها مختلفة .

مثال -14-

جد المصفوفة الأساسية للنظام $Y' = AY$ إذا كانت : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

الحـــل :

لقد سبق أن رأينا أن لهذه المصفوفة A قيمتين ذاتيتيــن $\lambda_1 = 3+5i$ و $\lambda_2 = 3+5i$
وأن المتجهين الذاتيين هما :

$$\vartheta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad , \quad \vartheta_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهما مستقلتان خطيا . باستعمال النظرية -9- فإن :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{3-5i)x} \\ ie^{3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix}$$

هي المصفوفة الأساسية على المجال $-\infty < x < \infty$ لهذا النظام .

ملاحظـــة :

بصورة عامة لا تعطي النظرية السابقة المصفوفة e^{Ax} , ولكنــها تمنــح المصفوفــة الأساسية $\Phi(x)$ للنظام $Y' = AY$. ووفق ما سبق مــن مناقشـــة ، بمـــا أن $\Phi(x)$ و e^{Ax} مصفوفتان أساسيتان للنظام $Y' = AY$ على المجـــال $-\infty < x < \infty$ فإنــه توجد مصفوفة C غير منفردة حيث :

$$e^{Ax} = \Phi(x)C$$

بوضع $x = 0$ نجد أن :

$$C = \Phi^{-1}(0)$$

وبالتالي :

$$e^{Ax} = \Phi(x)\Phi^{-1}(0) \qquad (34)$$

مثال -15-

جد المصفوفة e^{Ax} إذا كانت المصفوفة A هي المصفوفة المعرفة في المثال -15-

الحـــل :-

من خلال المثال -15- لدينا :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{(3-5i)x} \\ ie^{(3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix}$$

وبالتالي :-

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{(3-5i)x} \\ ie^{(3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$e^{Ax} = e^{3x} \begin{bmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -\sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

إذا كانت A حقيقية فإن المصفوفة e^{Ax} حقيقية حسب التعريف (25) وبالتالي تعطي المعادلة (34) طريق لتشكيل المصفوفة الأساسية في حالة A مصفوفة حقيقية والمثال -16- هو حالة خاصة لهذه الملاحظة .

4. النظام الخطي غير المتجانس Linear Nonhomogeneous system

نختم هذه الفقرة بأخذ النظام غير المتجانس

$$Y' = AY + g(x) \tag{35}$$

حيث A مصفوفة ثابتة و $g(x)$ هي دالة أتجاهية مستمرة على المجال $-\infty < x < \infty$.

باستعمال عبارة الثوابت المتغيرة واعتبار المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس هي:

$$\Phi(x) = e^{Ax}$$

حيث

$$\Phi^{-1}(s) = e^{-As}$$

أي

$$\Phi(x).\Phi^{-1}(s) = e^{(x-s)A}$$

وإذا كان الشرط الابتدائي هو

$$\Phi(x_O) = Y_O$$

فإن الحل المتجانس يكون من الصورة :

$$\Phi_h(x) = e^{(x-x_0)A} Y_O$$

ويكون حل النظام (35) من الصورة :

$$\Phi(x) = e^{(x-x_o)A}Y_O + \int_{x_o}^{x} e^{(x-s)A} g(s)ds, \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث e^{Ax} هي المصفوفة الأساسية للنظام المتجانس والتي يمكن الحصول عليها بالطريقة التي وضحناها أنفا. ونلاحظ أنه من السهل حساب مقلوب المصفوفة Φ وحساب أيضا $\Phi(x)\Phi^{-1}(s)$ ولكنه ليس من الممكن حساب التكامل (36) مباشرة إلا في حالات خاصة جدا .

مثال -16-

جد الحل Φ للنظام $Y'=AY + g(x)$ الذي يحقق الشرط الابتدائي إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad g(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كانت} \quad \phi(o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحـــل :

من المثال السابق لدينا

$$e^{Ax} = e^{3x}\begin{bmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -\sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix}$$

بالتعويض في (36) نجد أن :

$$\phi(x) = e^{3x}\begin{bmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -\sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \int_{o}^{x} e^{3(x-s)}\begin{bmatrix} \cos 5(x-s) & \sin 5(x-s) \\ -\sin 5(x-s) & \cos 5(x-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$= e^{3x}\begin{bmatrix}\sin 5x\\ \cos 5x\end{bmatrix} + \int_0^x e^{3(x-s)}e^{-s}\begin{bmatrix}\cos 5(x-s)\\ -\sin 5(x-s)\end{bmatrix}ds$$

في هذه الحالة يمكن حساب التكامل كما يلي :

$$\phi(x) = e^{3x}\begin{bmatrix}\sin 5x\\ \cos 5x\end{bmatrix} + e^{3x}\int_o^x e^{-4s}\begin{bmatrix}\cos 5x\cos 5s + \sin 5x\sin 5s\\ -\sin 5x\cos 5s + \cos 5x\sin 5s\end{bmatrix}ds$$

باستعمال عبارة التكامل بالتجزئة التالية :

$$\int_o^x e^{-4s}\cos 5s ds = \frac{e^{-4s}}{16+25}(-4\cos 5s + 5\sin 5x)\ \Big|_{s=0}^{s=x}$$

$$\int_0^x e^{-4s}\sin 5s ds = \frac{e^{-4S}}{16+25}(-4\sin 5s - 5\cos 5s)\ \Big|_{s=0}^{x=0}$$

نحصل على :-

$$\phi(x) = e^{3x}\begin{bmatrix}\sin 5x\\ \cos x\end{bmatrix} + e^{3x}\begin{bmatrix}\cos 5x\left[\frac{e^{-4x}}{41}(-4\cos 5s + \sin 5x) + \frac{4}{41}\right]\\ +\sin 5x\left[\frac{-e^{4x}}{41}(-4\sin 5x - 5\cos) + \frac{5}{41}\right]\\ -\sin 5x\left[\frac{e^{-4x}}{41}(-4\cos 5x + 5\sin 5x) + \frac{4}{41}\right]\\ +\cos 5x\left[\frac{e^{4x}}{41}(-4\sin 5x - 5\cos 5x) + \frac{5}{41}\right]\end{bmatrix}$$

ونلاحظ رغم بساطة المسالة إلا أن الإجابة معقدة وصعبة .

5. الحالــة العامــة The General Cose

في هذه الفقرة سنعين الصورة العامة للمصفوفــة e^{Ax} عندمـــا تكــون A مصفوفــة اختيارية $n\times n$ ونشير إلى أن الطريقة التي سنوضحها فيما يلي يمكن تطبيقها فـــي جميع الحالات وتحتوي على نتيجتي الفقرتين السابقتين التي تبيــن خــاصتين وننبــه القارئ إلى أن هذه الطريقة صعبة ومعقدة إلى حد ما . وسنستعمل النتيجة التالية مــن الجبر الخطي والتي يمكن الحصول علي برهانها في كتب الرياضيات المتقدمة .

لتكن A مصفوفــة $n\times n$ مركبة $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_k$ القيم الذاتية المختلفة للمصفوفــة A حيــث تعدديــة كــل منــها هــي $n_1,n_2,\ldots\ldots,n_k$ علـــى الـــترتيب وحيـــث

$$n_1+n_2+\ldots\ldots+n_x=n$$

نرفق لكل قيمة ذاتية λ_J ذات تعددية n_J النظام الخطي التالي :-

$$\left(A-\lambda_J I\right)^{nJ}\mathrm{X}=0$$

وتغطـــي حلــول كل نظام حطي فضاءا جزئيا يسمى X_J حيث $J=1,2,\ldots\ldots,n$.

الجبر الخطي النتيجة التالية :-

مـــن اجــل كــل $\mathbf{x}$ فـــي فضاء n اقليدي فانه توجد متجهات وحيـدة $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_k$ من اجل $(J=1,\ldots,k)$ $x_J\in\mathrm{X}_J$ حيـــث أن :-

$$x=x_1+x_2+\ldots.+x_K \qquad \textbf{(38)}$$

من المهم معرفة أن النظام الجبري الخطي (37) n_J حل مستقلة خطيـــا أي أن بعــد الفضاء الجزئي $\mathbf{X}$ هو n_j .

ونشير إلى أن في حالة كون القيم الذاتية كلها مختلفة عن بعضها فـان $n_J = 1$ حيـث $J = i,........,k$ و $k = n$ بالتالي فان المتجهات $x_1, x_2,.......,x_n$ هي مضاعفات المتجهات الذاتية الثابتة المستقلة خطيا و تغطي الفضاء n الاقليـدي . إذن إذا كـانت $\vartheta_1, \vartheta_2,.......,\vartheta_n$ هي مجموعة ثابتة للمتجهات الذاتية المستقلة خطيا للمصفوفـة A وإذا كان x متجه اختياريا ، فالمتجه x_J يعطي بالعلاقة :

$$x_J = C_J \vartheta_J$$

من اجل أي ثابت C_J حيث $j = 1,........,n$

لنطبـق هـذه الدراسة على النظام الخطي $y' = Ay$ ولنبحث عن الحل $\phi(x)$ الـذي يحقـق الشـرط الابتدائـي $\phi(x) = y_0$ وبنـاء علـى النظريـة $-7-$ فـان :- $\phi(x) = e^{xA}.y_0$ وهدفنا هو حساب $e^{xA}y_0$ مباشـرة أي البحـث عـن مركبـات المصفوفة $\phi(x)$.

ومن تعريف آسية المصفوفة فان الحالة العامة تكون $e^{xA}.y_0$ عبارة عن متسلسـلة لا نهائية وبالتالي فحسابها صعب ومعقد .
فالدراسة الجبرية التي سبق تقديمها توفر علينا هذا الجهد وذلك بتحليـل المتجـه y_0 بحيث أن مركبات $e^{xA}.y_0$ يمكن كتابتها علي صورة توافقية خطية منتهية من الأسـس وقوى x .
نحسـب القيـم الذاتيـة المختلفـة $\lambda_1, \lambda_2,.......,\lambda_n$ ذات التعددية $n_1, n_2,.........,n_k$ للمصفوفة A . ونطبق النظرية بالنسبة للمتجه y_0 وفق (38) فيكون لدينا :

$$y_0 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + ...+ \vartheta_k$$

حيث ϑ_J هو متجه اختياري من الفضاء الجزئي $\mathrm{x}_J \ (J=1,2,......,n)$.

بما أن x_J هو الفضاء الجزئي المغطي بالنظام (37) ، فان ϑ_J يمكن أن يكون حـلا للنظام (37) .

الآن من العبارة (39) يكون : -

$$e^{xA}\mathrm{y}_0=\sum_{J=1}^{k}e^{xA}\vartheta_J$$

ويمكن أن نكتب

$$e^{xA}\vartheta_J=e^{\lambda_J x}.e^{(A-\lambda_J I)^x}.\vartheta_J$$

$$=e^{\lambda_j x}\left[1+x(A-\lambda_j I)+\frac{x^2}{2!}(A-\lambda I)^2+...+\frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(A-\lambda_j I)^{n_j-1}\right]\vartheta_j$$

على المجال $-\infty<x<\infty$. ونلاحظ أن المتسلسلة داخل القوسين منتهيـة لان ϑ_J هو حل للنظام (37) وبالتالي $(A-\lambda_J \mathrm{I})^{n_J}\vartheta_J=0$ ومنه كل الحدود أعلى درجـة من هذا الحد في نشر المصفوفة $e^{(A-\lambda_J.1)x}$ تكون معدومة .

نلاحظ أن المتجهات $W_J=(A-\lambda_J.\mathrm{I})P\vartheta_J$ من اجل $P=0,1.....,n_J-1$ ينتمي إلى الفضاء الجزئي X_J لان :

$$(A-\lambda_J\mathrm{I})^{n_J}W_J=(A-\lambda_J\mathrm{I})^{n_J}(A-\lambda_J\mathrm{I})^P\vartheta_J=(A-\lambda_J\mathrm{I})^{nJ+P}\vartheta_J=0$$

إذن يبقى المتجه $e^{xA}\vartheta_J$ في x_J من اجل كل x حيث $-\infty<x<\infty$

بتطبيق هذا الحساب على الحل $\Phi(x)=e^{xA}\mathrm{y}_0$ للنظام $\mathrm{y}'=A\mathrm{y}$

نجد أن :-

$$\phi(x) = e^{xA}y_0 = e^{xA}\sum_{J=1}^{k}\vartheta_J = \sum_{J=1}^{k}e^{xA}.\vartheta_J$$

$$= \sum_{J=1}^{k}e^{\lambda_J x}\left[I + x(A-\lambda_J I) + \ldots\ldots + \frac{x^{nJ-1}}{(n_J-1)!}(A-\lambda_J I)^{n_J-1}\right]\vartheta_J$$

وفي النهاية الحل Φ الذي يحقق الشرط الابتدائي $\Phi(0) = y_0$ هـو :

$$\phi(x) = \sum_{J=1}^{k}e^{\lambda_J x}\left[\sum_{i=0}^{n_J-1}\frac{x^i}{i!}(A-\lambda_J I)^i\right]\vartheta_J, -\infty < x < \infty \qquad \textbf{(40)}$$

وهذه العلاقة تعطينا بالضبط مركبات الحل كدوال للمتغير x من اجل أي مصفوفة A.

مثال -17-

جد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية :-

$$y' = Ay \quad , \quad y(0) = y_0$$

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. جد أيضا e^{xA}

الحـل :

كما رأينا في الأمثلة السابقة أن $\lambda_1 = 3$ هي القيم الذاتية المضاعفة لهذه المصفوفـة أي $n_1 = 2$ وبالتالي هناك فضاء جزئي واحد X_1 .

لنحسب :

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن $(A-3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

وبالتالي يتحقق النظام (37) من اجل متجه في x_1 . بالتعويض في (40) حيث

$$n_1 = 2 \quad , \quad y_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

نجد أن :-

$$\phi(x) = e^{3x}\left[I + x(A-3I)y_0\right]$$

وبالتالي :-

$$\phi(x) = e^{3x}\left\{I + x\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^{3x}\begin{bmatrix} a + x(b-a) \\ b + x(b-a) \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{(41)}$$

هو الحل للنظام المعطاة حيث $\Phi(0) = y_0$

1-لتكوين e^{xA} يمكن استعمال العبارة التالية :

$$e^{xA} = e^{\lambda x} e^{(A-\lambda I)x} = e^{\lambda x} \sum_{c=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!}(A-\lambda I)^i$$

في حالة قيمة ذاتية واحدة يكون $(A-3I)^2 = 0$

ومنه

$$e^{xA} = e^{3x}\left[I + (A-3I)x\right] = e^{3x}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}x\right\}$$

$$= e^{3x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}.$$

2- يمكن استعمال العبارة (41) كما يلي :-

بما أن e^{xA} هي المصفوفة الأساسية التي تختزل إلى المصفوفة الوحـــدة عنـــد $x = 0$

إذن :

$$e^{Ax} = e^{xA}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[e^{xA}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{xA}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

حيث تعطي العبارة (41) متجهين الحلين $e^{xA}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e^{xA}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

بالتعويض أولا عن $y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ثم عن $y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ على الترتيب وهكذا نحصل أيضا على المصفوفة المطلوبة .

<u>مثال -18-</u>

لنعتبر النظام الثاني :

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 2y_3 \end{aligned}$$

الذي مصفوفة معاملاته هي :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

جد الحل ϕ الذي يحقق الشرط الابتدائي :- $\phi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = y_0$

الحـــل :-

كثير الحدود المميز للمصفوفة A هو $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ وبالتالي القيـــم الذاتية هي $\lambda_1 = 1$ و$\lambda_2 = 2$ مع التعددية $n_1 = 1$ و$n_2 = 2$ على الترتيب

لنأخذ النظم الجبرية الخطية من الصورة (37) أي :

$$(A - I)x = 0 \qquad , \quad (A - 2I)^2 x = 0$$

لتعين الفضائيين الجزئيين x_2 , x_1 من الفضاء الثلاثي الاقليدي .

بأخذ النظامين على التوالي يكون لدينا أولا : -

$$(A - I)x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \qquad \begin{matrix} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$$

إذن x_1 هـــو الفضـــاء الجزئـــي المغطـــي بالمتجهات $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ حيث $x_1 = 0, x_2 = x_3$

وواضح أن $\dim x_1 = 1$

ثانيا يكون لدينا :

$$(A - 2I)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \quad \begin{matrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}$$

إذن x_2 هو الفضاء الجزئي المغطي بالمتجهات $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ حيث $x_3 , x_1 = x_2$ اختياري

وواضح أن $\dim X_2 = 2$.

لنبحث الآن عن المتجهات $\vartheta_1 \in X_1$ و $\vartheta_2 \in X_2$ حيث أننا نستطيع كتابة المتجـه الابتدائي Y_o كما يلي : $Y_o = \vartheta_1 + \vartheta_2$

بما أن $\vartheta_1 \in X_1$ إذن $\vartheta_1 = \begin{bmatrix} o \\ \propto \\ \propto \end{bmatrix}$ من أجل $\propto$ ثابت ما .

وبما أن $\vartheta_2 \in X_2$ إذن $\vartheta_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ من أجل $\beta ، \gamma$ ثابتين اختياريين .

وبالتالي :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \\ \propto \\ \propto \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

أي أن $\beta = a$ ، $\propto + \beta = b$ ، $\propto + \gamma = c$ وبحل هذه المعادلات نجد أن $\propto = b - a$ ، $\beta = a$ ، $\gamma = c - b + a$.

و

$$\vartheta_1 = \begin{bmatrix} o \\ b-a \\ b-a \end{bmatrix}, \qquad , \qquad \vartheta_2 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ c-b+a \end{bmatrix},$$

باستخدام المعادلة (40) نجد الحل $\phi(x)$ حيث $\phi(x) = Y_o$

$$\phi(x) = e^{x}\vartheta_1 + e^{2x}\left[\mathrm{I} + x(A - 2\mathrm{I})\right]\vartheta_2$$

$$= e^{x}\begin{bmatrix} o \\ b_2 - a \\ b-a \end{bmatrix} + e^{2x}\left\{ I + x\begin{bmatrix} 1- & 1 & 1 \\ 2- & 2 & 1 \\ 1- & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} a \\ a \\ c-b+a \end{bmatrix}$$

$$= e^{x}\begin{bmatrix} a \\ b-a \\ b-a \end{bmatrix} + e^{2x}\begin{bmatrix} 1+x & -x & x \\ 2x & 1-2x & x \\ x & -x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \\ c-b+a \end{bmatrix} \qquad \textbf{(42)}$$

وللإيجاد e^{xA} نضع على الترتيب Y_o مساويا $\begin{bmatrix} 1 \\ o \\ o \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} o \\ 1 \\ o \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} o \\ o \\ 1 \end{bmatrix}$ في العبارة (42) فنحصل

على الحلول الثلاثة المستقلة خطيا التي نستعملها كأعمدة في المصفوفة :

$$e^{xA} = \begin{bmatrix} (1+x)e^{2x} & -xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{x} + (1+x)e^{2x} & e^{x} - xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{x} + e^{2x} & e^{x} - e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$$

مثال -20-

جد حل المسألة ذات القيمة الابتدائية التالية : $Y' = AY + g(x)$

حيث A هي المصفوفة المعرفة في المثال -18- و $g(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 1 \end{pmatrix}$

حيث $\phi(x) = Y_o$.

الحل :-

من المثال -18- لدينا : $\phi(x) = e^{xA} = e^{3x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}$

لنحسب :

$$\phi(x)\phi^{-1}(s) = e^{(z-s)A} = e^{3(x-s)}\begin{bmatrix} 1-(x-s) & x-s \\ -(x-s) & 1+(x-s) \end{bmatrix}$$

$$e^{(x-s)A}g(x) = e^{3x}\begin{bmatrix} 1-(x-s)+e^{-3s} & (x-s) \\ -(x-s)+e^{-3s} & (1+x-s) \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$\phi(x) = e^{3x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}Y_0 + e^{3x}\int_0^x \begin{bmatrix} 1-(x-s)+e^{-3s} & (x-s) \\ -(x-s)+e^{-3s} & (1+x-s) \end{bmatrix}$$

ويبدو هناك نقطة بسيطة في حساب التكاملات .

تمـــاريــــــن

(I)- أحسب المشتقة الأولى لكل من المتجهات أو المصفوفات التالية :

$$B(x)=\begin{bmatrix} x & e^{-x} & 7 \\ \sin x & 0 & \cos x \\ x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$ -1

$$B(x)=\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$ -2

$$U(x)=\begin{bmatrix} \ln x \\ x\ln x \\ x^2 \ln x \end{bmatrix} \quad , \quad 0 < x < \infty$$ -3

$$U(x)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad -1 < x < 2$$ -4

(II)- هل المتجهة $U(x)=\begin{bmatrix} 1/x \\ x^2 \end{bmatrix}$ **مستمر على المجال** $1 \le x \le 2$ ؟

وهل هو مستمر على المجال $-1 < x < 1$ **لماذا ؟**

(III)- أكتب النظام التالي على الصورة المصفوفية :

$$y_1' = 6y_1 - y_2$$

$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

أ)- بين أن المتجهين $U_1(x)=\begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix}$ و $U_2(x)=\begin{bmatrix} e^{3x} \\ 3e^{3x} \end{bmatrix}$

هما حلان لهذا النظام .

ب)- بين أن U_2,U_1 مستقلان خطيا على أي مجال $[a,b]$

ج)- جد الحل العام لهذا النظام حيث $y_1(0)=4$, $y_2(0)=3$.

IV- أعد نفس الأسئلة السابقة بالنسبة لمسألة القيم الابتدائية التالية :

$$Y(0)=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

حيث $U_1(x)=\begin{bmatrix} e^{2x} \\ (x-1)e^{2x} \end{bmatrix}$ و $U_2(x)=\begin{bmatrix} e^{2x} \\ -xe^{2x} \end{bmatrix}$

V- اكتب النظام التالي على الصورة المصفوفية :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \quad -2e^{2x} \end{aligned}$$

أ)- بين أن المتجهين $U_1(x)=\begin{bmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{bmatrix}$ و $U_2(x)=\begin{bmatrix} e^{-5x} \\ e^{-5x} \end{bmatrix}$ هما حلان للنظـــام

التجانسي المرفق لهذا النظام ؟

ب)- بين أن U_2,U_1 مستقلان خطيا ؟

ج)- بين أن الحل المتجانس لهذا النظام هو : $U_p(x)=\begin{bmatrix} -\frac{6}{7}e^{2x} \\ \frac{8}{7}e^{2x} \end{bmatrix}$

د)- اكتب صورة الحل العام لهذا النظام .

VI- اكتب مسألة القيم الابتدائية المكافئة على صورة نظام من المرتبة الأولى لكل من مسألة القيم الابتدائية التالية :

$$y'' + 2y' + 7xy = e^{-x} \quad , \quad y(1) = 7, y'(1) = -2$$

$$2y'' - 5x^2 y' + (\cos x)y = \ln x \quad , \quad y(2) = 1, y'(2) = 0$$

$$y''' - 6y'' + 3y' + e^{-x} y = \sin x \quad , \quad y(o) = y'(0) = y''(0) = 0$$

VII- بماذا تخبرنا النظرية **-1-** حول كل من مسألة القيم الابتدائية التالية :

-1 $\quad x_0 = 1 \ , \ n = 2$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ g(x) = \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix}, \ A(x) = \begin{bmatrix} x & \ln x \\ -1 & x \ln x \end{bmatrix}$$

-2 نفس الجزء -1- ماعدا $x_0 = -1$

-3 نفس الجزء -1- ماعدا $g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{x^2 9} \end{bmatrix}$

VIII- بين أن $\Phi(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$

حيث $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & \dfrac{2}{x} \end{bmatrix}$ على المجال I الذي لا يحتوي على نقطة المبدأ

هل أن $\det \Phi(0) = 0$ يتعارض مع النظرية -3-

IX- لنعتبر النظام التالي : $y' = AY + g(x)$

حيث : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $g(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$

تحقق أن : $\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix}$

هي المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$. جد الحل ϕ للنظام غير المتجانس حيث :

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

X- لنعتبر النظام التالي : $Y' = A(x)Y + g(x)$ حيث :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{x^2} & \frac{2}{x} \end{bmatrix} \ , \ g(x) = \begin{bmatrix} x^4 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

جد الحل ϕ الذي يحقق الشرط الابتدائي التالي $\phi(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ثم جد مجال صلاحية هذا الحل .

XI- أ- اثبت العلاقة (29) .

ب- إذا كانت M مصفوفة $n \times n$ فأثبت أن :

$$\left[e^{M}\right]^{-1} = e^{-M} \quad , \quad \left[e^{M}\right]^{k} = e^{kM} \quad , \quad e^{0} = I$$

حيث k عدد صحيح و 0 مصفوفة $n \times n$

ج- إذا كانت $\Phi(x) = e^{Ax}$ فأثبت أن $\Phi^{-1}(x) = e^{-Ax}$

XII- جد المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$ إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

XIII- أعد نفس السؤال إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

XIV- احسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرفقة للمصفوفات التالية :

1- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ؛ 2- $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ؛ 3- $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

XV- جد المصفوفة الأساسية للنظام $y' = AY$ ثم جد e^{xA} لكل من مصفوفة المعاملات التالية :

1- $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ؛ 2- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

3- $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ ؛ 4- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

XVI- جد الحل ϕ للنظام $y'=AY+g(x)$ في كل من الحالات التالية :

-1 $g(x)=\begin{bmatrix} e^x \\ 1 \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\phi(0)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

-2 $g(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-x} \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ $\phi(0)=0$

-3 كيفي $g(x)$ $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\phi(1)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

المصطلحـــــــــــــات

Glossary

Glossary المصطلحات

الفصل الأول

Differential Equation	معادلة تفاضلية
Ordinary Differential Equation	معادلة تفاضلية عادية
Partial Differential Equation	معادلة تفاضلية جزئية
closed form solution	صورة حل مغلقة
order	مرتبة
Degree	درجة
Linear	خطية
Homogeneous	متجانسة
Constant Coefficient	معامل ثابت
Variable coefficient	معامل متغير
Arbitrary Constant	ثابت اختياري

Essential	جوهري
General Solution	حل عام
Particular Solution	حل خاص
Singular Solution	حل منفرد
Complete	حل كامل
Boundary Conditions	شروط حدية
Boundary -Value- Problem	مسألة القيم الحدية
Independent Variable	متغير مستقل
Dependent Variable	متغير تابع
Derivative	مشتقة
Envelope	مغلف

الفصل الثاني

First Order	مرتبة أولى
Geometrical Interpretation	منحنى هندسي
Curve of Constant Slope	منحنى حبل متساوي
Lineal elements	عناصر مستقيمة
Direction Field	حقل اتجاه
Unique solution	حل وحيد
Many Solutions	حلول عديدة
Existence theorem	نظرية الوجود
Uniqueness theorem	نظرية الوحدانية
Integral curves	منحنى تكاملي
Family of curves	مجموعة منحنيات
Variables separable	متغيرات قابلة للفصل
Integrating Factor	عامل تكميل
Integrating	تكامل

الفصـــــل الثالث

Complete differentials	تفاضل تكامل
Exact differential equation	معادلة تفاضلية تامة
Fractions	كسور
Substitution	تعويض
Simultaneously	أنيـــا
Initial Conditions	شروط ابتدائية

الفصـــــــل الرابع

Linear Differential Equation	معادلة تفاضلية خطية
Term	حــــد
Complementary Function	دالة متممة
Bernoulli's equation	معادلة بيرنولي
Riccati's equation	معادلة ريكاتي
Elementary Functions	دوال أولية

الفصـــــل الخامـــس

Higher Degree	درجة عليا
Equations solvable for p	معادلات قابلة للحل بالنسبة لـــ p
Equations solvable for y	معادلات قابلة للحل بالنسبة لـــ y
Equations solvable for u	معادلات قابلة للحل بالنسبة لـــ u
Clariaut's equation	معادلة كليرو

الفصـــــل الســـــادس

Different Applications	تطبيقات مختلفة
Geometrical Applications	تطبيقات هندسية
physical Applications	تطبيقات فيزيائية
Rectangular coordinates	إحداثيات متعامدة
Slope of the tangent	صيل المماس
normal	العمودي
Subnormal	تحت العمودي
Polor coordinates	إحداثيات قطبية
Perpendicular	عمودي
Trajectory	مسار
$\propto$ - trajectory	مسار - $\propto$
Orthogonal trajectory	مسار متعامد

Hyperbola	قطع زائد
Concetric Circles	دوائر متحدة المركز
Newton's low of cooling	قانون نيوتن للتبريد
Temperature	درجة حرارة
Saturated	مشبع
Concentration	تركيز
Coefficient of Conductivity	معامل التوصيل
Terminal Velocity	السرعة النهائية
Electric circuit	دائرة كهربائية
Condenser	هنري
Ohm	أوم
Ampere	أمبير
Electromotive Force	قوة دفع كهربية
Resistance	مقاومة

Resistance	مكثف
Capacite	سعة
Charge	شحنة
Coulomb	كولوم
Kirchhoff's Low	قانون كيرشوف

الفصل السابع

Second order	مرتبة الثانية
Nonlinear	غير خطية
Homogeneous	متجانسة
Frequency	تردد
Damping Factor	معامل الخمود
Forced motion	حركة قسرية
Transient phenomen	ظاهرة عابرة
steady - state phenomenon	ظاهرة حالة الاستقرار
Horizontal beam	عارضة أفقية
Fibers	ألياف
Elatic curve	منحنى مرن
Neutral surface	سطح التعادل

Segment	قطعة
Modulus of Elasticity	معامل المرونة
Moment of inertia	عزم قصور ذاتي
Bending moment	عزم حاني
Fixed	مثبت
Pendulum	يندول
Friction	احتكاك
Center of gravity	مركز الثقل
Maximum deflection	أفران أقصى
Spring	زنبرك
Flexural Rigidity	جساءة الثني
Critical axials loads	أحمال محورية حرية
Critical Damping	نتمامد حوج

الفصـــــل الثـامـــن

Miscellaneous applications	تطبيقات متنوعة
Radius of curvature	نصف قطر الانحناء
Oscillatory motion	حركة اهتزازية
Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Amplitute	سعـــة
Displacement	إزاحـــة
Period	دور
Damped motion	حركـــة مخمـــدة
Converges absolutely	تقارب مطلق
Ratio teot	اختيار النسبة
odd	فـــردي
Even	زوجي

Continuous	مستمرة
Recursion Formula	صيغة تراجع
Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Convergence Internal	مجال التقارب
Analytic Function	دالة تحليلية
Toylor series	متسلسلات تيلور
Irregular	غير منتظم
Ordinary point	نقطة عادية
Integer	عدد صحيح
Differentiation Successive	تفاضل متعاقب
Frobenius Series	متسلسلات فروبيوس
Indical equation	معادلة آسية
Finite	محدد

الفصـــــل التاســـع

Series	متسلسلة
Singular point	نقطة منفردة
Regular singular point	نقطة منفردة منتظمة
Dummy Index	دليل - آسية
Partial Sum	مجموع جزئي
Remainder	متبقي
Center	مركز
Power series	متسلسلة قوى
Convergent	متقارب
Divergent	متباعد
Abel's Idenlity	متطابقة أبيل
Linearly Independent	مستقل خطيا

Linearly dependent	مرتبط خطيا
Necessary and sufficient condition	الشرط اللازم والكافي
Complementary function	دالة متممة
Reduction of order	تخفيض المرتبة
D' Alembert	دا لمبير
Constant coefficients	معاملات ثابتة
Variable coefficients	معاملات متغيرة
Operator	مؤثر
Polynomial	كثير حدود
characteristic equator	معادلة مميزة
characteristic roots	جذور مميزة
Real roots	جذور حقيقية
Complex roots	جذور مركبة
Distinct real roots	جذور حقيقية مختلفة (ضمايزة)

Repeated roots	جذور مضاعفة
Formula	صيغة
Partial Fractions	كسور جزئية
Constants of Integration	ثوابت التكامل
Undetermined coefficient	معاملات غير معينة
Variation of Parameters	تغيير برامترات
Lagrange	لاغرانج
Restriction equation	معادلة قيدية

الفصـــل العاشــــر

Famous	شهير
Legendre 's Equation	معادلة ليجندر
Kronicker index	دليل كرونيكر
Bessel's Equation	معادلة بيسل
Euler equation	معادلة أويكر
Gauss equation	معادلة جاوس
Hypergeometric series	متسلسلات فوق هندسية
Laguerre equation	معادلة لأكبر
Hermite equation	معادلة هرميث

الفصل الحادي عشر

Higher Order	مرتبة عليا
Wronskian	رونسكيان
Reduction of order	تخفيض المرتبة
Cramer	كرامير
undetermined coefficients	معاملات غير معينة
Variation of parameters	تغيير البارامترات

الفصل الثاني عشر

Laplace Transform	تحويل لابلاس
Elementary functions	دوال بسيطة
Operator	مؤشر
Derivatives	مشتقات
Gamma function	دالة جاما
Periodic function	دالة دورية
Inverse Tronsform	تحويل عكسي

الفصل الثالث عشر

Existence and uniqueness Theorem	نظرية الوجود والوحدانية
Series	متسلسلات
Lipschitz Condition	شرط ليبشيتز
proof	إثبات
Lemma	تمهيدية
Gronwall Inequality	متراجحة كروانوال

الفصل الرابع عشر

Linear system	نظام خطي
Linear homogeneous	نظام خطي متجانس
Vector	متجه
Matrix	مصفوفة
Exponential of a matrix	آسية المصفوفة
Eigenvectors	قيم ذاتية
Determinant	محدد
Fundamental matrix	مصفوفة أساسية
General Case	حالة عامة

المحتـــــــــــــــــوى



المـــــراجـــــــــع

المحتـــــوى

المعـادلات التفاضلية العادية
حـــلول وتطبيقات

الفصل الأول : المعادلات التفاضلية العادية

الفصل الثاني : المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

الفصل الثالث : المعادلات التفاضلية التامة من المرتبة الأولى

1- تعاريف ونظريات .

2- عامل التكميل - تعريفه وطريقة البحث عنه .

3- تمارين .

الفصل الرابع : المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى

1- تعريف المعادلة التفاضلية الخطية .

2- نظريات .

3- المعادلات التي يمكن أرجاعها الى معادلات خطية :

- معادلة بيرنولي Bernoulli التفاضلية .
- معادلة ريكاتي Reccati التفاضلية .

4- تمارين .

الفصل الخامس المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ومن الدرجة العليا

1- تعريف .

2- معادلات تحل في $p = y'$

3- معادلات تحل في y

4- معادلات تحل في k

5- معادلة كلير Clairaut

6- تمارين .

الفصل السادس : تطبيقات مختلفة على المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

الفصل السابع : المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثابتة

الفصل الثامن : تطبيقات متنوعة على المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

1- تطبيقات هندسية .
2- تطبيقات فيزيائية .
3- تطبيقات كهربائية .
4- تطبيقات تركيبية (بنية الأجسام الصلبة) .
5- تمارين .

الفصل التاسع : متسلسلات الحلول للمعادلات الخطية من المرتبة الثانية

1- مقدمة : تعاريف ومفاهيم .
دليل المتسلسلة .
متسلسلة القوى .
النقطة العادية والنقطة المنفردة لمعادلة تفاضلية .

2- الحلول في متسلسلة قوى بجوار النقطة العادية .
نظرية -1-
طريقة العمل لإيجاد الحل بجوار نقطة عادية .
طريقة التفاضل المتعاقب .
نظرية -2-

الفصل العاشر : متسلسلات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية الخطية الشهيرة

الفصل الحادي عشر : المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة العالية

الفصل الثالث عشر : دراسة وجود وانفراد حلول المعادلات التفاضلية

الفصل الرابع عشر : النظم الخطية للمعادلات التفاضلية

المـراجـــــــــع

1- AGNEW R.P "Differential Equations " Mc Grow - Hill N.Y, 1960

2- BIRKOFF G. And ROTA G "Ordinary Differential Equations " Ginn and Company , Boston 1962

3- EARL D.R and PHILLIP E.B "Elementary Differential Equations " Mocmillan Publishing Co , Inc New York ,1972

4- FRED B. and JOHN A.N " Ordinary Differential Equations " A First course W.A. Benjamin, Inc. California , 1973 .

5- KOSHLYAKOV N.S. , SMIRNOV M.M and GLINER E.B. " Differential Equations of Mathematical physics " North - Holland Publishing Company Amsterdam , 1964

6- RICHARD B. " Differential Equations " schoum's Outline Serics, Mc Grow - Hill book Company , 1975

7- ZANE C . M "Introduction to Ordinary " Differential Equations " Prindle , Weber et Schmidt Boston , Mossachusetts , 1972.

8- PIERRE GRISVARD "Calcul Differential of Equations Differentials " office des publications Universitaires , 2 eme Edition, Alger , 1980 .

9- زيد الأمير " المعادلات التفاضلية "

ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 1985

10 – السيد / عبدالمعطي البدري " المعادلات التفاضلية العادية وتطبيقاتها "

دار الراتب الجامعية , بيروت 1985

11– فرانك آيرز " نظريات ومسائل في المعادلات التفاضلية "

سلسلة ملخصات شوم دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر

والتوزيع القاهرة1988

12- GEORGE ARFKEN "Mathematical Methods for Physicists" Second edition Academic Press , New York – 1970

13- Differential Equations : A Aodeling perspective R.L. Borrelli & C. Coleman John Wiley & Sons , Ltd 1996

14- Differential equation and boundary value prowls W.E. Boyce & R.C. Diprima John Wiley Sons ,Ltd .1992

15- Differential equation with meple K.R. Coombes ,B.R. Hunt ,R.L . Lipsmon , J.E. Osborn & G.T. Stuck J.W 1996

16- Ordinary Differential Equations Birkhoff , 1989. J&w .

17- Introduction of Ordinary Differential Equations Ross , 1989 .J&W